Tarea 2.c
Ma26-B Matemáticas Aplicadas
Profesor: Rafael Correa
Auxiliares:Omar Larré, Tomas Spencer, Leonardo Zepeda

1. Sea Ω un Volumen simplemente conexo en $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una función tal que:

$$A(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{\|y-x\|} dy$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}^3$, y u es de clase C^1, suponemos además que todas las derivadas parciales pueden entrar y salir libremente de la integral, (Dejo como ejercicio, encontrar las condiciones mínimas para que esto ocurra) pruebe entonces que:

$$G(x) = \nabla \times A(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y) \times (x-y)}{\|y-x\|^3} dy$$

donde $G(x)$ es un campo vectorial, y $A(x)$ es su potencial vectorial.

2. Sean $E(x, y, z, t)$ y $H(x, y, z, t)$ campos vectoriales que llamaremos Campo Eléctrico e Intensidad Magnética, dos campos vectoriales de clase C^2 tales que cumplen:

$$\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{S} B \cdot d\vec{\sigma}\right)$$
$$\int_{\partial S} H \cdot d\vec{s} = \int_{S} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{\sigma}$$

para toda superficie orientable S, que pertenezca a $\mathbb{R}^3$, en donde $B(x, y, z, t)$, $J(x, y, z, t)$ y $D(x, y, z, t)$ son campos vectoriales, de clase C^2 llamados, Campo Magnético, Densidad de Corriente, y Corriente de Desplazamiento.

Pruebe la tercera y cuarta Ecuaciones de Maxwell :

$$iii)\ \ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ y } \ iv)\ \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

3. Considere la primera y segunda Ecuaciones de Maxwell:

$$i)\ \ \nabla \cdot D = \rho \text{ y } \ ii)\ \nabla \cdot B = 0$$

Donde $\rho(x, y, z, t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, y se llama Densidad Total de Carga.

Además dentro de la teoría de Electromagnetismo se tiene que:

$$D = \epsilon E \text{ y } B = \mu H$$

Donde $\epsilon(x, y, z, t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 al igual que μ, las cuales generalmente en la vida cotidiana, como lo serán en este problema son funciones lineales, y tales que todos los vectores son paralelos en particular, estas funciones son intrísecas al material, por donde "pasan" los campos, pero en este caso en particular supondremos que los materiales son homogéneos, i.e. que ϵ y μ son constantes.

(a) Usando apropiadamente $i)$ y $iv)$ pruebe que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times H - J)$$

(b) Pruebe que si un campo vectorial A de clase C^2, entonces se tiene que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

(c) De lo anterior concluya la Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

4. Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, una función de clase C^1, diremos que u tiene un soporte compacto, si se anula en un conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$.

   Ahora bien, supongamos que u tiene soporte compacto y conexo, y es tal que $\nabla\ u \neq 0$ en ese conjunto.

   (a) Pruebe que la ecuación $u = 0$, define una superficie que llamaremos S en $\mathbb{R}^3$, para ello:

      i. Argumente por qué S tiene que ser al menos cerrado
      Indicación: recuerde que si una función es contínua, entonces la pre imagen de un cerrado es cerrada.

      ii. Diga porqué S no puede ser un volúmen i.e. suponga que es un volúmen, y de un argumento que lo lleve a una contradicción
      Indicación: recuerde que si f es constante en un abierto, entonces $Df = 0$ en ese conjunto.

      iii. Encuentre una parametrización (obviamente en función de u y de alguna otra función que sepa que exista) de S
      Indicación: recuerde el Teorema de la Función Implícita.

   (b) Ahora que ya se ha convencido de que S dada por $u = 0$ es una superficie (o variedad bidimensional), intentaremos convencerle mediante un par de ejemplos que $\nabla u(x, y, z)$, es el vector normal del plano tangente a la variedad en el punto $(x, y, z) \in S$, para lo cual.

      i. Sea $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, pruebe que $\nabla u(x, y, z)$ es el vector normal al plano tangente que es lo mismo que el vector normal a la superficie en ese punto, en particular que es paralelo a $\hat{r}$

      ii. Sea $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - h$, donde h es un parámetro que puede ser cambiado, pruebe que en este caso $\nabla u(x, y, z)$ corresponde a $\hat{\rho}$.

   (c) Ahora que ya se ha convencido totalmente, (al menos eso espero) de que el conjunto en donde se anula una función puede definir una superficie, y que en esa superficie, el vector normal a esta no es nada menos que el gradiente.

Definimos en $\mathbb{R}^3$ un volumen Ω regular, como aquel que es tal que Existe $u : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1donde U es un abierto que contiene estrictamente a Ω, tal que $u = 0$ define a $\partial\Omega$.Es claro ver que casi siempre este volumen será suave, o mejor dicho como "redondito" :-P, y entre más alto sea el grado de la función de define su frontera, más suave será, como por ejemplo la esfera cuya frontera está definida por una función clase C^∞

Entonces Sea Ω un volumen regular, y sea $u : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1donde U es un abierto que contiene estrictamente a Ω, pruebe que :

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla \times F) \cdot \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} d\sigma = 0$$

Para todo $F \in C^1\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3\right)$