P1) Considere el disco $D = \{(x,y,z): x^2+y^2 \leq R^2, z=0\}$. Sea $u = u(\rho,\theta)$ la temperatura del disco en estado estacionario ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

i) Muestre que u satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (1)$$

Sol.: Ec. del calor $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0$

donde k es el coef. de difusividad térmica

Pero hablamos de estado estacionario $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \Delta u = 0$

En coordenadas cilíndricas, el laplaceano se escribe como sigue

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

ii) Sea $u(\rho,\theta) = F(\rho)\cdot G(\theta)$. Demuestre que existe una constante λ que satisface EDOs para F y G, encuentre su valor y resuelva las ecuaciones (sabiendo que G es periódica)

Reemplazando $u(\rho,\theta) = F(\rho)\cdot G(\theta) = F\cdot G$ en (1)

$$\Rightarrow F''G + \frac{1}{\rho}F'G + \frac{1}{\rho^2}FG'' = 0 \qquad / \frac{1}{F\cdot G}$$

$$\Leftrightarrow \frac{F''}{F} + \frac{1}{\rho}\frac{F'}{F} + \frac{1}{\rho^2}\frac{G''}{G} = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2\frac{F''}{F} + \rho\frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G}$$

Luego, como ambas ecuaciones dependen de distintos parámetros en ciertos intervalos, deben valer constante, λ, tal que:

$$\Rightarrow \quad -\frac{G''}{G} = \lambda \quad \wedge \quad \rho^2 \frac{F''}{F} + \rho\frac{F'}{F} = \lambda \quad \Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} G'' + \lambda G = 0 \\ \rho^2 F'' + \rho F' - \lambda F = 0 \end{array}$$

De la ecuación para $G(\theta)$, obtenemos que:

$$G(\theta) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta} = Ae^{i\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\theta}$$

Como G es periódica, de período 2π, entonces

$$G(0) = G[2\pi]$$

$$\Rightarrow A + B = Ae^{i\sqrt{\lambda}2\pi} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi}$$

Aún no tenemos condiciones de borde, por lo que A y B pueden ser ambos distintos de cero, entonces

$$A(1 - e^{i\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi}) + B(1 - e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi}) = 0$$

- Si $A \wedge B \neq 0$

$$\Rightarrow 1 - e^{i\sqrt{\lambda}2\pi} = 0 \quad \wedge \quad 1 - e^{-i\sqrt{\lambda}2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{i\sqrt{\lambda}2\pi}}_{\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}2\pi)} = 1 \quad \wedge \quad \underbrace{e^{-i\sqrt{\lambda}2\pi}}_{\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - i\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}2\pi)} = 1 \quad \left(\text{ssi, } \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1 \text{ y } \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = 2\pi K \quad \Rightarrow \quad \lambda = K^2$$

- Si $A = 0 \vee B = 0$ es lo mismo
- Si $A = B = 0$, solución trivial...

Con esto, deducimos que

$$G(\theta) = A_K \cos(K\theta) + B_K \,\mathrm{sen}(K\theta) = G_K(\theta)$$

Para F, notamos que si $F(\rho) = \rho^K$,

$$\Rightarrow F'(\rho) = K\rho^{K-1}$$
$$\text{y } F''(\rho) = K(K-1)\rho^{K-2}$$

③

$$\Rightarrow \rho^2 \cdot F'' + \rho F' - k^2 F = \rho^2 \cdot k(k-1)\rho^{k-2} + \rho \cdot k\rho^{k-1} - k^2\rho^k$$
$$= k^2\rho^k - k\rho^k + k\rho^k - k^2\rho^k = 0 \;!!$$

Por lo que $F(\rho) = \rho^k$ es solución.

iii) Considere la condición de borde $u = u(R,\theta) = f(\theta)$ donde $f(\cdot)$ es 2π periódica. Encuentre una expresión en serie para la solución.

Tenemos que $u(\rho,\theta) = \sum_{k\geq 0} \rho^k \left[A_k \cos(k\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\theta)\right]$

$$\Rightarrow u(R,\theta) = f(\theta) = \sum_{k\geq 0} R^k \left[A_k \cos(k\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\theta)\right]$$

$/\int_0^{2\pi} \cdot \cos(k\theta)d\theta$ y $\int_0^{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(k\theta)d\theta$

$$\Rightarrow A_k = \frac{1}{R^k \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$$

$$\text{y } B_k = \frac{1}{R^k \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen}(k\theta)\,d\theta$$

i) Demostrar que la TF de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ está dada por:

$$\hat{f}(s) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s\, e^{-|s|}$$

Sol) Buscamos $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} e^{-isx}\,dx$

Usando el hecho ~~de~~ que $\dfrac{x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, polinomios primos entre si con $gr(p) \leq gr(q) + 1$, para $s > 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{q(p)=0 \\ \operatorname{Im}(q(p))>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{-isz}, p\right) + \pi i \sum_{\substack{q(a)=0 \\ a\in\mathbb{R}}} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{-isz}, a\right)$$

(siempre y cuando los polos reales sean simples)

Luego, $q(z) = 0 = (1+z^2)^2 \iff z = i \vee z = -i$, cada uno con multiplicidad 2.

Pero $\operatorname{Im}(q(p)) > 0 \Rightarrow$ usamos solamente $z = i$

con $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{(z-i)^2 \cdot z\, e^{-isz}}{(z+i)^2(z-i)^2} = -\frac{i e^{s}}{4} \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(1+z^2)^2} e^{-isz}, i\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{\cancel{(z-i)^2}\, z\, e^{isz}}{(z+i)^2 \cancel{(z-i)^2}}\right)$$

$$= \lim_{z\to i}\left(\frac{(e^{-isz} - zis\,e^{-isz})(z+i)^2 - z e^{-isz}\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}\right)$$

$$= \frac{-(e^{s} + s e^{s})4 - (2i)^2 e^{s}}{(2i)^4} = \frac{-4e^{s} - 4s e^{s} + 4e^{s}}{16}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(1+z^2)^2} e^{-isz}, i\right) = \frac{-s e^{s}}{4}$$

para $s<0$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} e^{-isx}\,dx = -\frac{\pi i s}{2} e^{s}$$

Para $s<0$, entonces,

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[-\frac{\pi i s}{2} e^{s} \right] = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s e^{s} \quad \checkmark$$

A partir de lo anterior, busquemos para $s>0$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} e^{-isx}\, dx \underset{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-y}{(1+y^2)^2} e^{isy} \cdot (-dy)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(1+y^2)^2} e^{isy}\, dy$$, por lo que podemos aplicar el teorema y reemplazamos en el residuo "s" $= -s$

y llegamos a $\hat{f}(s) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s e^{-s}$

Si $s=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} = 0$ pues $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ es impar

$$\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(s) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s e^{-|s|} \quad //$$

b) Las vibraciones de una varilla semi-infinita satisfacen la ecuación

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \quad , \quad x>0, \; t>0$$

Suponiendo que la varilla está empotrada en sus extremos $(u(0,t) = u(+\infty,t) = 0)$ y que inicialmente se encuentra en reposo $(u_t(x,0) = 0)$ en la posición $u(x,0) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Demostrar, usando el método de la T.F. (extendiendo la ecuación adecuadamente a $-\infty < x < +\infty$, $t>0$) que la solución está dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} s\, e^{-s} \cos(a s^2 t) \operatorname{sen} sx \, ds$$

Sol)

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad x>0,\ t>0$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(+\infty,t) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2} \end{cases}$$

Extendemos la función a $x \in \mathbb{R}$, de manera impar. (la continuamos llamando u).

Tomando T.F c/r a x en la ec.

$$\widehat{u_{tt}} + a^2 \widehat{u_{xxxx}} = \hat{0}$$

y usando que: $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$

$$\Rightarrow \hat{u}_{tt} + a^2 (is)^4 \hat{u} = 0 \quad , \quad \hat{u} = \hat{u}(s,t)$$

$\Rightarrow$ tenemos la siguiente EDO en t para $\hat{u}$:

$$\hat{u}_{tt} + a^2 s^4 \hat{u} = 0$$

cuya solución será

$$\hat{u}(s,t) = A(s)\cos(as^2 t) + B(s)\,\mathrm{sen}(as^2 t)$$

- $u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \hat{u}_t(s,0) = 0$

y como

$$\hat{u}_t(s,t) = -A(s)\cdot as^2\,\mathrm{sen}(as^2 t) + B(s)\, as^2 \cos(as^2 t)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t(s,0) = B(s)\, as^2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B(s) = 0$$

- $$u(x,0) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \hat{u}(s,0) = \frac{-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s\, e^{-|s|}$$

por la parte i)

Luego,

$$\hat{u}(s,t) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, s\, e^{-|s|} \cos(as^2 t)$$

Nos piden $u(x,t)$, por lo que calculamos la antitransformada de $\hat{u}(s,t)$:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,s\,e^{-|s|}\cos(as^2t)\right)e^{isx}\,ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\underbrace{s}_{\text{impar}}\,\underbrace{e^{-|s|}}_{\text{par}}\cdot\underbrace{\cos(as^2t)}_{\text{par}}\right)\cdot\overbrace{\cos(sx)}^{\text{par}}}_{\text{impar}}\,ds \quad 0$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,s\,e^{-|s|}\cos(as^2t)\right)\operatorname{sen}(sx)\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\overset{\text{impar}}{s}\,\overset{\text{par}}{e^{-|s|}}\,\overset{\text{par}}{\cos(as^2t)}\,\overset{\text{impar}}{\operatorname{sen}(sx)}\,ds$$

lo de adentro $\Rightarrow$ es par

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\frac{1}{4}\int_{0}^{\infty}s\,e^{-s}\cos(as^2t)\operatorname{sen}(sx)\,ds}$$

pq $s\geq 0$

3) a) Para $h > 0$ constante considere la ecuación

$$u_t = u_{xx} - h u_x \quad , \quad -\infty < x < +\infty \;, \; t > 0$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x) \;, \quad -\infty < x < +\infty$$

Use TF (suponiendo que las transformadas existen) para demostrar que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - th + 2y\sqrt{t})\, e^{-y^2} dy$$

Sol:

Aplicamos TF a la ecuación:

$$\hat{u_t} = \hat{u_{xx}} - h\hat{u_x} \quad \text{y como} \quad \hat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t = (is)^2 \hat{u} - h(is)\hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t = -s^2\hat{u} - his\hat{u} \Rightarrow \hat{u}_t + (s^2 + ihs)\hat{u} = 0$$

cuya solución viene dada por

$$\hat{u}(s,t) = A(s)\, e^{-s^2t} \cdot e^{-ihst}$$

Por otra parte, sabemos que

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(s,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-ixs} dx$$

$$\Rightarrow A(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixs} dx$$

$$\Rightarrow \hat{u}(s,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx} dx\right) e^{-s^2t}\, e^{-ihst}$$

antitransf.

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t)\, e^{isx} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx} dx \cdot e^{-s^2t}\, e^{-ihst}\, e^{isx} ds$$

x=y en la integral

$$\Rightarrow u(x,t) \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-isy}\,dy\right]e^{-s^2t}\,e^{-ihst}\,e^{isx}\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-s^2t}\,e^{is(x-y-ht)}\,dy\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ht+2z\sqrt{t})\,e^{-s^2t}\,e^{is(x-ht-(x-th+2z\sqrt{t}))}\,ds\cdot 2\sqrt{t}\,dz$$

$y = x-ht+2z\sqrt{t}$

$dy = 2\sqrt{t}\,dz$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ht+2z\sqrt{t})\,e^{-s^2t}\cdot e^{-is2z\sqrt{t}}\,ds\,dz$$

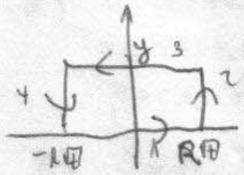
$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ht+2z\sqrt{t})\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2t}\cdot e^{-2isz\sqrt{t}}\,ds\right]dz$$

z=y → mudos

$$\Rightarrow u(x,t) \overset{?}{=} \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ht+2y\sqrt{t})\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s\sqrt{t}+iy)^2}\cdot e^{-y^2}\,ds\right]dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ht+2y\sqrt{t})\cdot e^{-y^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s\sqrt{t}+iy)^2}\,ds\right]dy$$

Para ver el valor de esa integral, lo típico...



$$\oint e^{-z^2}dz = 0 = \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-x^2t}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{0}^{y} e^{-(R\sqrt{t}+iy)^2}\,i\,dy}_{2} + \underbrace{\int_{R}^{-R} e^{-(x\sqrt{t}+iy)^2}\,dx}_{3}$$

$$+ \underbrace{\int_{y}^{0} e^{-(-R\sqrt{t}+iy)^2}\,i\,dy}_{4}$$

pero 2 y 4

$$i\int_0^y e^{-R^2t}\,e^{\pm 2R\sqrt{t}\,iy}\,e^{-y^2}\,dy \xrightarrow{R\to\infty} 0 \quad \left[\text{pues } |e^{\pm 2R\sqrt{t}\,iy}|<1,\ e^{-R^2t}\to 0 \text{ y } |e^{-y^2}|<M\right]$$

$\lim_{R\to\infty}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s\sqrt{t}+iy)^2}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2t}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

$$\Rightarrow u(x,t)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-th+2y\sqrt{t})\,e^{-y^2}\,dy$$

Ej. Prop:

Considere la ecuación de calor en una esfera sólida de radio R y difusividad térmica $\alpha > 0$. Buscamos soluciones con simetría esférica, es decir, $u = u(t, r)$

a) Expresando el Laplaciano en coordenadas esféricas muestre que $u = u(t, r)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$$

b) Usando separación de variables pruebe que esta ecuación admite soluciones del tipo

$$u(t, r) = e^{-\alpha\beta^2 t} \frac{a \sin(\beta r) + b \cos(\beta r)}{r}$$

con a, b, β constantes a determinar

c) Pruebe que basta tomar $b = 0$ para que la solución encontrada en la parte (b) satisfaga la condición de borde en $r = 0$ dada por

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial u}{\partial r}(t, r) = 0 \quad , \text{ para } t > 0$$

d) Determinar las constantes $\beta = \beta_k$, $k: 1, 2, \ldots$ tales que se satisfaga además la condición de borde $u(t, R) = 0$ para $t > 0$

e) Concluya que la solución de la ecuación de calor en la esfera con condiciones de borde dadas en (c) y (d) es de la forma:

$$u(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\alpha \beta_k^2 t) \operatorname{sen}(\beta_k r)/r$$

y encuentre los coeficientes A_k en términos de la condición inicial $u(0, r) = f(r)$, $0 \leq r \leq R$