Departamento de Ingeniería Matemática
MA26B-03: Matemáticas Aplicadas
Profesor: Pierre Guiraud
Auxiliares: Raul Aliaga, Maximiliano Rojo

Clase Auxiliar 7(Viernes 29/10/04)
Transformada de Fourier

1. Calcule la Transformada de Fourier de $\chi_a(x)$:

$$= \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Solución

$$(\hat{\chi_a})(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_a(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-isx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\frac{-1}{is} e^{-isx}]_{-a}^{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{is} (e^{-isa} - e^{isa})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \operatorname{sen} as}{s}$$

2. **La Ecuación de Ondas** , La ecuación:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0$$

Describe las vibraciones verticales de una cuerda infinita, con $u(x,t)$ la función de desplazamientos verticales de la cuerda en la posición x, en el tiempo t. Sean el desplazamiento inicial y velocidad inicial:

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\delta u}{\delta t}(x,t) = g(x), -\infty < x < \infty$$

Resuelva usando Transformadas de Fourier.

Solución

Tomaremos Transformadas de Fourier a la ecuación de ondas y a las condiciones iniciales, con respecto a la variable x y denotaremos con un sombrerito ($\hat{}$) a las funciones transformadas. Usando las propiedades de derivación de la Transformada de Fourier:

$$\frac{\delta^2 \hat{u}}{\delta t^2} - (cis)^2 \hat{u} = 0, -\infty < s < \infty, t > 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\delta^2 \hat{u}}{\delta t^2} + (cs)^2 \hat{u} = 0$$

Luego, esto es una típica ecuación, cuya solución conocemos bien:

$$\hat{u}(s,t) = A(s)\cos(cst) + B(s)\operatorname{sen}(cst)$$

Donde las constantes pueden depender de s, pues la ecuación es en función de t, Luego cuando t=0:

$$\hat{u}(s,t) = A(s) = \hat{f}(s), \quad \frac{\delta \hat{u}}{\delta t}(s,t) = \hat{g}(s) = csB(s)$$

Por lo tanto

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\cos(cst) + \frac{\hat{g}(s)}{cs}\operatorname{sen}(cst)$$

Pero es mejor verlo como

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\cos(cst) + \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\hat{g}(s)}{2c}\frac{2\operatorname{sen}(cst)}{s}$$

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)(\frac{e^{i(ct)s} + e^{-i(ct)s}}{2}) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2c}(\widehat{\chi_c t * g})(s)$$

Así, usando la propiedad de traslación en el primer término, y la propiedad de convolución en el segundo:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_c t(x-ct)g(y)dy$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{|x-ct|<ct} g(y)dy$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy$$

Esta es la solución de D′Alembert a la ecuación de ondas unidimensional.

3. **Identidades de Plancherel y de Parseval**
Demuestre las identidades de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{g}(x)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds$$

y la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

Solución
Por el teorema de convolución:

$$F^{-1}(\hat{f}(s)\hat{g}(s)) = (f * g)(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

O sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\hat{f}(s)\hat{g}(s)ds$$

en x=0

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)g(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\hat{f}(s)\hat{g}(s)ds$$

Reemplazando $g(x)$ por $\bar{g}$(-x), la Transformada de Fourier $\hat{g}(s)$ es reemplazada por $\bar{\hat{g}}(s)$, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\bar{g}(-y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds$$

o equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{g}(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds$$

La cual es la identidad de Plancherel, cuando $f = g$ obtenemos la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

4. **Teorema de Shannon**

Def: Una función f se de dice de *banda limitada* en s_0, si:

$$\hat{f}(s) = 0, \forall s, |s| > s_0 > 0$$

s_0 es llamada *frecuencia de corte*.

Teorema (Shannon): Sea f una función talque existen su transformada y antitransformada de Fourier, continua y de banda limitada a $|s| \leq s_0$, Entonces:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL) \frac{\sin s_0(x - nL)}{s_0(x - nL)} \quad L = \frac{\pi}{s_0}$$

Demuestrelo, usando los siguientes pasos:

a) Considere la familia de funciones $\hat{\phi_n}(s)$ dadas por:

$$\begin{cases} 0 & |s| > \mathrm{s}_0 \\ 2\mathrm{s}_0^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-in\pi s}{s_0}} & |s| \leq s_0 \end{cases}$$

y demuestre que la Transformada inversa para cada una esta dada por:

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2s_0}}{2\pi} \frac{\sin(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}$$

b) Demuestre que la familia $\hat{\phi_n}(s)$ es una familia de funciones ortonormales, es decir, que el producto interno para funciones complejas entre $\hat{\phi_n}(s)$ y $\hat{\phi_m}(s)$ es cero si $n \neq m$ y es uno si $m = n$.

c) Muestre que la familia $\hat{\phi_n}(s)$ permite escribir la función f como una serie de Fourier, cuyos coeficientes estan en función de muestras de la función en intervalos de largo L, y concluya.

Solución

a)

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \hat{\phi_n}(s) ds$$

$$2\pi \phi_n(x) = \int_{-s_0}^{s_0} e^{ixs} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{in\pi s}{s_0}} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s_0}^{s_0} e^{is(x-\frac{n\pi}{s_0})} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\frac{e^{is(x-\frac{n\pi}{s_0})}}{i(x-\frac{n\pi}{s_0})}]_{-s_0}^{s_0}$$

$$= \sqrt{2\pi}(\frac{e^{i(s_0x-n\pi)} - e^{-i(s_0x-n\pi)}}{2i(s_0x-n\pi)})$$

$$= \sqrt{2\pi} \frac{\sin(s_0x-n\pi)}{s_0x-n\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{\sin(s_0(x-nL))}{s_0(x-nL)}$$

donde $L = \frac{\pi}{s_0}$.

b)

$$< \hat{\phi_n}, \hat{\phi_m} >= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi_n}(s) \overline{\hat{\phi_n}(s)} ds$$

$$= \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} e^{-\frac{in\pi s}{s_0}} \overline{(e^{-\frac{im\pi s}{s_0}})} ds$$

$$= \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} e^{\frac{i(m-n)\pi s}{s_0}} ds$$

es fácil ver que si $m = n$, el resultado es 1, si $m \neq n$:

$$= [\frac{\sin(\frac{(m-n)\pi s}{s_0})}{\frac{(m-n)\pi s}{s_0}}]_{-s_0}^{s_0} + i(\cos((-m+n)\pi) - \cos((m-n)\pi)) = 0$$

c) Tenemos que la familia de funciones $\hat{\phi_n}(s); n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ forman un conjunto ortonormal en la subclase de funciones que tienen anti-transformada en el intervalo $(-s_0, s_0)$, como $\hat{f}(s)$ es de banda limitada con frecuencia de corte s_0 tiene serie de Fourier

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \hat{\phi_n}(s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2s_0}} e^{-\frac{in\pi s}{s_0}}$$

donde los coeficientes c_n estan dados por

$$c_n =< \hat{f}, \hat{\phi_n} >= \int_{-s_0}^{s_0} \hat{f}(s) \frac{1}{\sqrt{2s_0}} e^{-\frac{in\pi s}{s_0}} ds$$

gracias a la identidad de Plancherel

$$c_n =< \hat{f}, \hat{\phi_n} >= 2\pi < f, \phi_n >$$

entonces

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \hat{\phi_n}(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi < f, \phi_n > \hat{\phi_n}(s)$$

Tomando antitransformada de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi < f, \phi_n > \phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} < f, \phi_n > \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{\sin(s_0(x - nL))}{s_0(x - nL)}$$

Las muestras de la función a intervalos de largo $L = \frac{\pi}{s_0}$ son:

$$f(kL) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} < f, \phi_n > \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{\sin(s_0(kL - nL))}{s_0(kl - nL)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} < f, \phi_n > \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{\sin(\pi(k - n))}{\pi(k - n)}$$

$$=< f, \phi_k > \sqrt{\frac{2\pi}{L}}$$

entonces

$$< f, \phi_k >= f(kL) \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

finalmente

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} < f, \phi_n > \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{\sin(s_0(x - nL))}{s_0(x - nL)}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL) \frac{\sin(s_0(x - nL))}{s_0(x - nL)}$$

logrando el resultado que queriamos.