

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde
: Evelyn Andaur

TAREA 2

PRIMAVERA 2006

ENTREGA 02 OCTUBRE 2006

- 1) Si la v.a. $K \rightarrow U(0, 5)$, calcule la probabilidad que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$ sean reales.

$$K \rightarrow U(a, b) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- 2) En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si esta cae a lo sumo a 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central de la pista es una v.a. con función densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900} & \text{si } -30 \leq x \leq 0 \\ \frac{30-x}{900} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos k impactos Cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan n bombas?
- b) Si k=1, determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la pista con probabilidad 0,99.
- 3) Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0, α ($X_0 > 0, \alpha > 0$) si su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq X_0 \\ 0 & \text{si } x < X_0 \end{cases}$$

- a) Calcule $\mathbb{E}(x)$ y $Var(x)$
- b) Si $Y = Ln(\frac{X}{X_0})$, determine la densidad de Y
- c) Considere que X representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan

ingresos superiores a \$300.000.

- d) Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10% mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.
- 4) De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector (X, Y) Como X : N° de monos obtenidos. Y : N° de ases obtenidos.
- a) Determine la distribución de probabilidades (X, Y) .
- b) Determine las distribuciones marginales de X e Y . Calcule la $E(X)$ y $E(Y)$.
- c) Determine la distribución condicional de X dado $Y = y \forall y \in R_y$ y la distribución condicional de Y dado $X = x \forall x \in R_x$.
- d) Determine la distribución de probabilidades de las variables $M = H(X, Y) = \text{Max}(X, Y)$
 $M = H(X, Y) = \text{Min}(X, Y)$.
- 5) Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad X (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad Y (en miles de pesos). Las variables X e Y tienen una densidad conjunta :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & \text{si } 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Determine la función densidad de la variable ganancia por vehículo (G).
- b) Considere ahora sólo la variable Y (precio de venta) con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{72} & \text{si } 0 < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Debido a las condiciones económicas imperantes, el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. Él ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta está entre 0 y 2000 un 1% en vales de bencina. Si el precio está entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es \$40. Para el resto entrega una radio de valor \$100. Estudie probabilísticamente la variable monto regalado por automóvil. Calcule su esperanza.

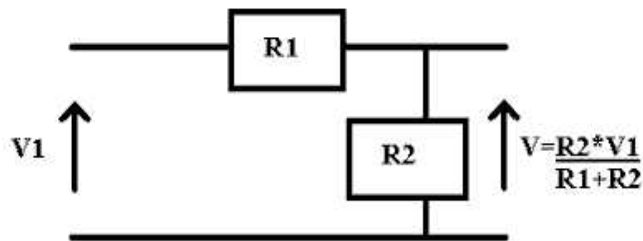
- 6) La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I , queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

- a) Si P es un punto variable con X e I , suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2, 4)$ e I uniforme en el intervalo $(10, 20)$ (ambas variables independientes)

calcule la función densidad de H .

- b) Calcule la $\mathbb{P}(H > 10|X < 3)$.
- 7) El circuito de la figura es un divisor de voltaje. El voltaje V_1 es constante y vale 1(V). Las resistencias R_1 y R_2 son v.a. independientes uniformes en los intervalos (1,2) y (0,1) respectivamente.



- a) Calcule la probabilidad que el voltaje resultante sea menor a 0,2(V) para valores de R_2 mayores a 0,1 Ω
- b) Determine, usando T.C.V., la función densidad de V .
- c) Un instrumento registra correctamente voltajes entre 0,2 y 0,4 (V) en tanto a los mayores a 0,4 les asigna 0,4 y a los menores a 0,2 los ignora (no es capaz de medirlos). Estudie probabilísticamente la v.a. T : tensión (voltaje) registrado por el instrumento.
- 8) En cierto sector de Santiago los vehículos circulan con velocidades V (km/h) que pueden ser adecuadamente modeladas por una distribución $U(20, 40)$ (km/h). Por otro lado y debido a los distintos tipos de vehículos, formas de conducir, imprevistos, etc. el rendimiento R (km/lt) para una velocidad V fija queda dado por la función densidad:

$$f_{R/V}(r|v) = \frac{50}{v^2}r \quad 0 < r < \frac{v}{5}$$

- a) Calcule el rendimiento promedio para todos los vehículos que circulan por el sector.
- b) Calcule la probabilidad que el rendimiento supere los 4km/lt para vehículos que circulan a menos de 30km/h. Son R y V independientes?
- 9) a) Sea X v.a. discreta con recorrido $R_x = \mathbb{N}$. Muestre que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

- b) Durante las últimas fiestas usted jugó lanzando argollas a una botella de pisco de tal forma que la probabilidad de apuntarle es r , y lanzó hasta que obtuvo su botella. Usando el resultado de a), calcule el número promedio de lanzamientos realizados.

- 10) Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución $e(\lambda)$, es decir:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en $t = 0$, pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) esté bueno le asigna t_2 horas.

- Determine la distribución de Y : duración informada por el operario. Calcule $E(Y)$.
- Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z : duración informada por el operario.
- Si Y se distribuye con una exponencial de parámetro α independiente de X , calcule $\mathbb{P}(Y > k \cdot X) \forall k$
- Determine la densidad de $Z = X + Y$.

- 11) Una fuente luminosa produce en un punto dado una iluminación L dada por:

$$L = \frac{I}{R^2}$$

donde I : intensidad luminosa de la fuente y R : Distancia del punto a la fuente.

Suponga que I y R son v.a. Independientes, tales que $I \rightarrow U(1, 2)$ y $R \rightarrow e(1)$

- Calcule $\mathcal{P}(L > 1/I > 1.5)$
 - Usando T.C.V. Determine la densidad de L
 - Calcule la iluminación promedio de puntos ubicados a dos unidades de distancia.
- 12) Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0,9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.
- 13) La duración T (en horas) de cierta máquina, es una v.a. exponencial de parámetro λ . La máquina tiene costos de funcionamiento de C_1 (UM) por hora y produce, mientras funciona,

un ingreso de C_2 (UM) por hora. Para operar la máquina se requiere un especialista que cobra C_3 UM por hora y que exige ser contratado por un número prefijado de horas (H). El pago del especialista es independiente de si la máquina está o no en funcionamiento.

- a) Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.
 - b) Determine H de tal forma de maximizar la utilidad esperada.
 - c) Suponga que $\alpha = 0,01$, $C_1 = 6$, $C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y que $H = 60$ (no es el óptimo de b). Determine la distribución de probabilidades de la v.a. U .
- 14) Un plano está dividido en rectas paralelas separadas una distancia L_1 una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo L_2 que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en $L_1 = L$ y $L_2 = \frac{L}{2}$
- 15) En un banco se ha determinado que los clientes piden préstamos por una cantidad x (U.M.) aleatoria, con la distribución :

$$\mathcal{P}(x = k) = \frac{1}{2}^k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Por otro lado se ha realizado un estudio que indica que una persona pagará una proporción y de lo que solicitó ($x=k$) donde y tiene función de densidad:

$$f_y(y) = (k+1)y^k \quad 0 < y < 1$$

Si un cliente es calificado como "seguro" si paga más de $4/5$ de lo solicitado:

- a) Calcule la probabilidad que un cliente que pidió k U.M. sea "seguro"
- b) Si un cliente es "seguro", calcule la probabilidad que haya pedido 2 U.M