

## Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema  
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde  
Evelyn Andaur

### PAUTA CONTROL 3 6 DE NOVIEMBRE 2006

1. a) Sean  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de v.a. i.i.d. Sea  $N$  una v.a. discreta tal que  $\mathbb{P}(N = j) = p_j$   $j \in \mathbb{N}$ . Sea  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ :

1) Análogo al problema hecho en clase auxiliar:

$$\mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{tY} | N)) = \mathbb{E}_N\left(\prod_{i=1}^N M_{X_i}(t)\right) = \mathbb{E}(M_X(t)^N)$$

2) Derivando se obtiene:

$$\mathbb{E}(e^{tY})'|_{t=0} = \mathbb{E}(N \cdot M_X(0)^{N-1} M_X'(0)) = \mathbb{E}(N \cdot \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(N)$$

3) Reemplazando en (a) se tiene:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}((pe^t + 1 - p)^N) = \sum_{N=1}^{\infty} (pe^t + 1 - p)^N \lambda^N \frac{e^{-\lambda}}{N!} = e^{\lambda \cdot p(e^t - 1)}$$

Que corresponde a la F.G.M. de una v.a. de poisson de parámetro  $\lambda \cdot p$

- b) Por T.C.L. basta encontrar  $\mathbb{E}(X_i)$  y  $V(X_i)$ , donde  $X_i$  es el número obtenido en la  $i$ -ésima extracción. Un sencillo cálculo nos da por resultado  $\mathbb{E}(X_i) = 7$ ,  $V(X_i) = 14$ , luego:

$$\mathbb{P}(X > 200) = \mathbb{P}\left(z > \frac{200 - 140}{\sqrt{20 \cdot 14}}\right) = \mathbb{P}(z > 3,58) = 0$$

Como el número buscado no se encuentra en la tabla se asume que tal probabilidad es cero.

2. La temperatura diaria máxima (en grados C) de cierta localidad es Normal de media  $25^\circ\text{C}$  y desviación estándar  $3^\circ\text{C}$ . Un día se considera caluroso si la temperatura supera los  $30^\circ\text{C}$ .

- a) Primero es necesario encontrar la probabilidad de que un día sea caluroso, la cual denotaremos por  $p$ , luego usando una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $p$ , se calcula la probabilidad de no obtener ningún día caluroso (es más sencillo) y se despeja  $n$  por:  $n = \frac{\log(0,05)}{\log(1-p)}$ , donde  $p$  se puede obtener haciendo uso de la tabla ( $p = 0,0485$ ).

- b) Sabemos que el promedio satisface:  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ , luego  $\bar{X} - \mu \rightarrow N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ , igualando:  $\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| < 1) = 0,99$  y usando las propiedades de la distribución Normal se obtiene:

$$\mathbb{P}(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{\sqrt{n}}{3})$$

El valor correspondiente en la tabla:

$$\frac{\sqrt{n}}{3} = 2,57 \Rightarrow n = 59,4 \approx 60$$

- c) Usar distribución geométrica, expresando el valor esperado por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{(1-p)^2}$$

- d) Al aplicar una transformación lineal la distribución obtenida es claramente normal, por lo que solo resta encontrar los parámetros, luego se tiene que  $F \rightarrow N(77, 24,5)$ .

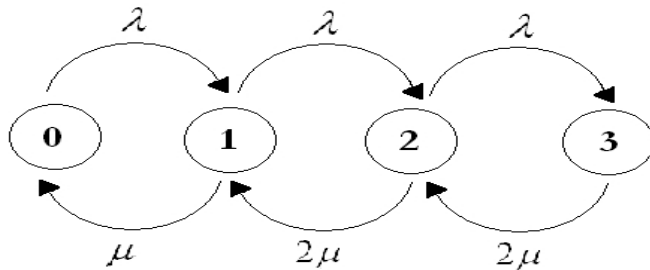
3. a) 2 cajeros automáticos en paralelo

- 1) Modelo del proceso  $X_t$  = Número de clientes en la sucursal

Segn enunciado tenemos que

$\lambda = 2$  personas por minuto

$\mu = \frac{1}{90 \text{seg}} = 0.67$  personas por minuto



Ecuaciones de balance:

$$\mathbb{P}_0 \cdot \lambda = \mathbb{P}_1 \cdot \mu$$

$$\mathbb{P}_1 \cdot (\lambda + \mu) = \mathbb{P}_0 \cdot \lambda + \mathbb{P}_2 \cdot 2\mu$$

$$\mathbb{P}_2 \cdot (\lambda + 2\mu) = \mathbb{P}_1 \cdot \lambda + \mathbb{P}_3 \cdot 2\mu$$

$$\mathbb{P}_3 \cdot (2\mu) = \mathbb{P}_2 \cdot \lambda$$

De dichas ecuaciones es posible obtener la distribucion de este proceso (al reconocer que es un proceso conocido, de nacimiento y muerte se obtiene su distribución, cuya fórmula estaba en Formulario C3) es decir:

$$P_K = \frac{\prod_{i=1}^K \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0$$

As, teniendo adems (en esta modelo) que  $\sum \mathbb{P}_i = 1$ , se puede calcular el valor de cada probabilidad estacionaria. Tomado

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2 \text{ y} \\ \mu_1 &= \mu = 0,67 \text{ y } \mu_2 = \mu_3 = 2\mu = 1,34 \end{aligned}$$

Ser tiene que  $\mathbb{P}_0 = 0,0656$ ,  $\mathbb{P}_1 = 0,1968$ ,  $\mathbb{P}_2 = 0,2952$ ,  $\mathbb{P}_3 = 0,4428$

2) i) Tasa efectiva de ingreso

$$\lambda \cdot \mathbb{P}_0 + \lambda \cdot \mathbb{P}_1 + \lambda \cdot \mathbb{P}_2 + 0 \cdot \mathbb{P}_3 = \lambda \cdot (\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2)$$

ii) Proporción de tiempo cajeros ociosos

- Considerando ambos cajeros ociosos, corresponde a la probabilidad de estar en estado 0 es decir,  $\mathbb{P}_0$  - Si se considera el caso que ambos estén ociosos o uno de los cajeros, la proporcin queda dada por:  $\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$

b) Sistema modificado

Tasas de ingreso  $\lambda_C$  para clientes y  $\lambda_O$  para no clientes

Tasas de atencin  $\mu_C$  para clientes y  $\mu_O$  para no clientes

\* Pueden hacer diversas formas de modelar el sistema planteado

Sea:

$$X = (\text{caja1}, \text{exclusivaclientes}) = \begin{cases} 0 & \text{caja vacía} \\ 1 & \text{un cliente en atención} \\ 2 & \text{un cliente esperando} \end{cases}$$

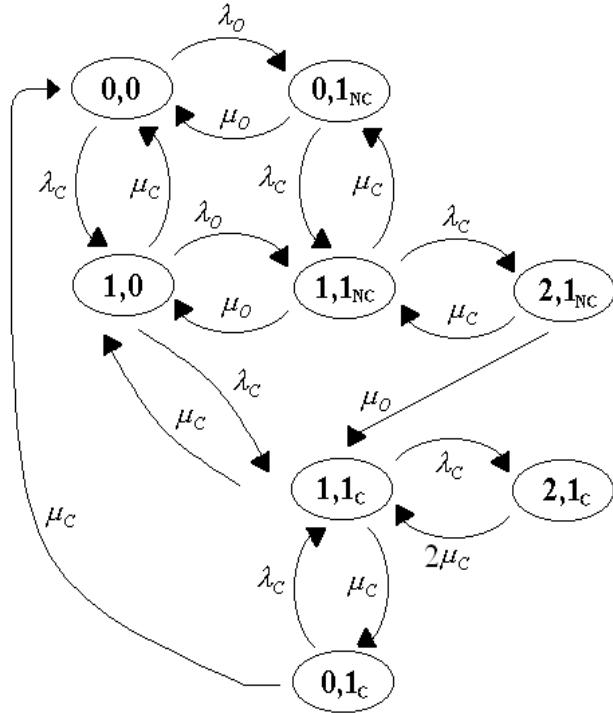
$$Y = (caja2, clientesynoclientes) = \begin{cases} 0 & \text{caja vacía} \\ 1C & \text{un cliente en atención} \\ 1NC & \text{un no cliente en atención} \end{cases}$$

Estados posibles:

$(0,0)$  ,  $(0,1C)$  ,  $(0,1NC)$  ,  $(1,0)$  ,  $(1,1C)$  ,  $(1,1NC)$  ,  $(2,0)^*$  ,  $(2,1C)$  ,  $(2,1NC)$

El estado \* no es posible, ya que no puede haber un cliente esperando y estar caja 2 vacía, pues caja 2 acepta a clientes y no clientes

Dado eso tendremos el siguiente modelo



Ecuaciones de balance

$$IP_{0,0}(\lambda_0 + \lambda_C) = IP_{0,1NC} \cdot \mu_0 + IP_{1,0} \cdot \mu_C + IP_{0,1C} \cdot \mu_C$$

$$IP_{0,1NC}(\lambda_C + \mu_0) = IP_{0,0} \cdot \lambda_0 + IP_{1,1NC} \cdot \mu_C$$

$$IP_{1,0}(\lambda_0 + \mu_C) = IP_{0,0} \cdot \lambda_C + IP_{1,1NC} \cdot \mu_0$$

$$IP_{1,1NC}(\lambda_C + \mu_C + \mu_0) = IP_{0,1NC} \cdot \lambda_C + IP_{1,0} \cdot \lambda_0 + IP_{2,1NC} \cdot \mu_C$$

$$IP_{2,1NC}(\mu_C + \mu_0) = IP_{1,1NC} \cdot \lambda_C$$

$$IP_{1,1C}(\lambda_C + 2\mu_e) = IP_{2,1NC} \cdot \mu_0 + IP_{1,0} \cdot \lambda_C + IP_{0,1C} \cdot \lambda_C + IP_{2,1C} \cdot \mu_C$$

$$IP_{2,1C} \cdot 2\mu_e = IP_{1,1C}$$

$$IP_{0,1C}(\mu_e + \lambda_C) = IP_{1,1C} \cdot \mu_C$$