

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : José Luis Malverde
Evelyn Andaur

CLASE AUXILIAR EXTRA

23 DE NOVIEMBRE 2006

1. Sea (X, t) vector aleatorio t.q.:

$T \rightarrow e(\lambda)$ y $(X/T = t) \rightarrow P(t)$ es decir:

$$P(X = k/T = t) = \frac{e^{-t} t^k}{k!}, k \geq 0.$$

Muestre que $P(X = k) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}, k \geq 0.$

Indicación: Recuerde la función Gamma.

2. El diámetro de los pernos de una caja es una v.a. Normal de media 2 cm. y desviación estándar 0.03 cm. El diámetro de los agujeros de las tuercas de otra caja es una v.a. Normal de media 2.02 cm. y desviación estándar 0.04 cm. Un perno y una tuerca ajustan si el diámetro de la tuerca es mayor que el diámetro del perno y la diferencia entre estos diámetros es menor a 0.05 cm. Si se escoge una tuerca y un perno al azar, cuál es la probabilidad de que ajusten?
3. Se sabe que el consumo eléctrico de las familias de Santiago sigue una distribución Normal de media 300 Kwh y desviación estándar 90 Kwh.
- a) Calcule la probabilidad de que, de 3 familias independientes, al menos 2 de ellas consuman más de 400 Kwh.
- b) Chilectra cobra un cargo fijo de \$1.000 mensuales más \$50 por Kwh. Si la empresa tiene un millón de abonados, calcule el ingreso mensual esperado.
- c) Suponga ahora que en invierno se cobra \$50 por Kwh para los primeros 400 Kwh \$100 por cada Kwh que supere los 400. Determine el ingreso mensual esperado por la empresa (deje expresado)
4. a) Sean $X \rightarrow N(0, 1)$ e $Y \rightarrow N(0, 1)$. Determine, usando T.C.V. la densidad de $V = \frac{X}{Y}$
- b) Si $Z = 3X + 3$ y $W = -2Y - 2$ Calcule $\mathcal{P}(|Z - 4W| > 10)$
- c) Si X_1, \dots, X_n son v.a. independientes, que siguen la distribución de Z , determine n tal que $\mathcal{P}(|\bar{X} - \mu| < 0,1) = 0,95$ donde \bar{X} es el promedio de las v.a. X_i

5. A un exámen oral llegan alumnos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 5[\frac{\text{alumnos}}{\text{hora}}]$.
- Si entre las 00:00 hrs. y las t:00 hrs. han llegado n alumnos; calcule la probabilidad que entre las 0:00 hrs. y s:00 hrs. hayan llegado k alumnos ($\forall s, t, \forall k, n$).
 - Antes de rendir el exámen los alumnos han sido clasificados en dos categorías: los buenos alumnos y los regulares. Los buenos alumnos serán examinados por el Profesor Auxiliar, mientras que los alumnos regulares serán evaluados por una comisión de Profesores. En caso de que el Profesor Auxiliar, tras examinar a un alumno se declare “incompetente”, el alumno deberá esperar para ser evaluado por la comisión de Profesores. Se sabe que el Profesor Auxiliar examina según un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_a} = 5[\text{minutos}]$, mientras que la comisión examina según un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\mu_c} = 15 [\text{minutos}]$. Además se sabe que un alumno es bueno con probabilidad p y que el Profesor Auxiliar se declarará incompetente con probabilidad q . Suponiendo que los alumnos al llegar se ponen en dos filas, una para cada instancia de examinación(sin restricciones de capacidad):
 - Modele el sistema y dibuje el diagrama de estados.
 - Suponiendo conocidas la Probabilidades estacionarias, calcule el tiempo promedio de espera de un alumno regular (desde que llega hasta que es examinado).
6. En una red multiusuario los terminales envían documentos para imprimir a una tasa de 12 $[\frac{\text{documentos}}{\text{hora}}]$ (Poisson) La impresión demora un tiempo exponencial de media 5 minutos. La impresora puede guardar hasta 5 documentos, incluyendo el que está en impresión.
- Determine en régimen permanente, el tiempo promedio que demora un documento en ser impreso, desde que se envía.
 - Suponga que la impresora ha sido configurada para comenzar a imprimir cuando hay al menos 3 trabajos en la cola. La impresora, una vez activada, se mantendrá imprimiendo hasta que no queden trabajos en cola.
 - Modele y dibuje el diagrama de estados.
 - Plantee 2 ecuaciones de balance.