

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesor Auxiliar : José Luis Malverde
: Evelyn Andaur

FORMULARIO EXAMEN 24 DE NOVIEMBRE 2006

- Combinatoria

- $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

- $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

- $P_{\text{elementos repetidos}} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k}$

- $C_{n-1}^{n-1+k} = C_k^{n-1+k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$

- Propiedades

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$; $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) =$

- $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j=2}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k=3}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap \dots \cap A_n)$

- $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$; $\mathbb{P}(B) > 0$

- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

- $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A|A_i)$ donde $\{A_i\}_{i=1}^n$ es partición,

- i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \wedge \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

- $\mathbb{P}(A) = \sum_{\{X_i | X_i \in A\}} \mathbb{P}(X_i), \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i) = 1$

- $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $F(X) = \sum_{\{X_i | X_i \leq X\}} \mathbb{P}(X_i)$, $F(X) = \int_{-\infty}^X f(x)dx = \mathbb{P}(x \leq X)$.
- $f(x) = \frac{\delta F(X)}{\delta X}$.
- Probabilidades Totales (caso continuo): $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A|Y=y)f_Y(y)dy$.

• Variables aleatorias

- T.C.V (1D) $f_Y(y) = f_X(H^{-1})|\frac{\delta H^{-1}(y)}{\delta y}|$ con $Y = H(X)$.
- (X, Y) vector probabilidad, con densidad conjunta $f(x, y)$ si X e Y son v.a. y $f(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) = 1$.
- (X, Y) vector probabilidad. $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$, $\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} F(x, y) = f(x, y)$.
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$.
- Si X e Y son independientes, $\mathbb{P}(X_i, Y_j) = \mathbb{P}(X_i) \cdot \mathbb{P}(Y_j)$ o $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
- $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$.
- T.C.V (2D) $f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |\det(J)|$ donde J es la matriz jacobiana del cambio de variables.

• Esperanza y Varianza

- Esperanza: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(X = i)$.
- $\mathbb{E}(C) = C$, $\mathbb{E}(CX) = C\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^N X_i) = \sum_{i=0}^N \mathbb{E}(X_i)$.
- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = X \cdot Y$ Si X e Y son independientes
- Sea X v.a., $Y=H(X) \rightarrow$
 $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} H(X_i) \cdot \mathbb{P}(X_i)$
 $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \cdot f_X dx$
- Sea (X, Y) v.a., $Z=H(x, y) \rightarrow$
 $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} H(X_i, Y_j) \cdot \mathbb{P}(X_i, Y_j)$
 $\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$

- Varianza: $V(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- $V(C) = 0$, $V(CX) = C^2V(X)$.
- Covarianza: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- Esperanza Condicional: $\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)dx$, $\mathbb{E}(X|Y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot p(x_i|y_i)$.
- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$.

• Función Generadora de Momentos:

- La f.g.m. de una v.a. X está dada por: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.
 Continuo: $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$, Discreto: $M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i)$.

• Distribuciones

- Binomial: $X \rightarrow B(n, p) \Rightarrow \mathbb{P}(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
 $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $f.g.m = (pe^t + 1 - p)$
- Binomial Negativa: $X \rightarrow BN(r, p) \Rightarrow \mathbb{P}(x = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ $k = r.. \infty$.
 $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}$, $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$, $f.g.m = (\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t})^r$
- Hipergeométrica: $H \rightarrow H(n, N_A, N) \Rightarrow \mathbb{P}(x = k) = \frac{\binom{N_A}{k} \binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
- Poisson (parámetro λ): $\mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$.
 $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$, $f.g.m = e^{\lambda(e^t - 1)}$
- Geométrica: $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.
- Normal: $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ si $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$.
 $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, $f.g.m = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- Exponencial: $X \rightarrow e(\lambda)$ si $f(x) = \lambda e^{-\lambda \cdot x}$, $x > 0$.
 $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $f.g.m = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

- Uniforme: $X \rightarrow U(a, b)$ si $f(x) = \frac{1}{b-a}$ para $x \in (a, b)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad , \quad f.g.m = \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$$
- Gamma: $X \rightarrow G(\alpha, \beta)$ si $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, para $x > 0$
donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad , \quad V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad , \quad f.g.m = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$$

- TCL

Sea $\{X_i\}_{i=1}^N$ v.a. con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$, $Var(X_i) = \sigma_i^2$, Entonces, para N “grande”, se tiene que:

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i - \sum_{i=1}^N \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}} \rightarrow N(0, 1)$$

- Proceso de Poisson

- Si los tiempos de ocurrencia de eventos se distribuyen exponenciales de parámetro λ , entonces $\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, donde $N(t)$: Número de eventos ocurridos en $[0, t]$
- Tiempo de ocurrencia: $\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$
- Proceso de nacimiento y muerte: Probabilidades estacionarias: $P_n = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0$, con μ_i : tasa de nacimiento en el estado “i”, λ_i : tasa de muerte en el estado “i”.
- Fórmulas de Little:

$$\text{Numero promedio de clientes: } L_{(ensistema)} - L_{Q(encola)} = L_{S(enatencion)}$$

$$\text{Tiempo promedio: } W_{(ensistema)} - W_{Q(encola)} = W_{S(enatencion)}$$

$$L = \lambda_{efectiva} \cdot W$$

$$L_Q = \lambda_{efectiva} \cdot W_Q$$

$$L_S = \lambda_{efectiva} \cdot W_S$$