

Trabajo dirigido #1 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Sea (E, Θ) un espacio topológico separado (i.e., dados $x, y \in E, x \neq y$, existen U, V vecindades disjuntas de x e y respectivamente).

- (a) Sea (x_1, x_2, \dots, x_n) una colección finita de elementos distintos de E , pruebe que $\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists V_i$ vecindad de x_i tal que la colección (V_1, V_2, \dots, V_n) cumple que $i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset$. ¿Es esta propiedad cierta si la colección de los x_i 's no es finita? (demuestre la propiedad o dé un contraejemplo).
- (b) Muestre que todo subconjunto finito de E es cerrado.

Considere el espacio topológico $([0, 1[, \Theta)$, donde $\Theta = \{[0, \alpha[\mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

- (c) Verifique que Θ es una topología. ¿Cómo son los cerrados de $([0, 1[, \Theta)$? Muestre que este espacio no es separado.
- (d) Sea $I = [a, b] \subset [0, 1]$. Determine $\text{adh}(I)$, $\text{int}(I)$.

Problema 2. Sea (A, \leq) un conjunto totalmente ordenado. Un conjunto $B \subset A$ se dice *cofinal* si $\forall a \in A, \exists b \in B$ tal que $a \leq b$. Pruebe que A contiene un conjunto cofinal bien ordenado. *Indicación:* use el Lema de Zorn, para lo cual defina una buena clase de conjuntos \mathcal{R} y sobre ella considere la relación \preceq definida por

$$C \preceq D \Leftrightarrow C \subset D \text{ y } \forall c \in C, \forall d \in D \setminus C, c \leq d.$$