

## Trabajo dirigido #3 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

**Problema 1.** Considere una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$ , donde  $E$  es un espacio topológico, y  $\mathbb{R}$  lo dotamos de la topología usual. Definimos los siguientes subconjuntos de  $E \times \mathbb{R}$ :

$$\text{Grafo de } f : G_f = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda = f(x)\}.$$

$$\text{Epígrafo de } f : G_f^+ = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda > f(x)\}.$$

$$\text{Hipógrafo de } f : G_f^- = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda < f(x)\}.$$

Considere  $f$  continua. Muestre que  $G_f^+$  y  $G_f^-$  son abiertos y concluya que  $G_f$  es cerrado.

**Problema 2.** Sean  $E$  y  $F$  dos espacios topológicos.

- (a) Sea  $f : E \mapsto F$  una función,  $A \subseteq E$ . En  $A$  consideramos la topología traza. Mostrar que si  $f$  es continua entonces  $f|_A$  es continua, donde  $f|_A$  es la restricción de  $f$  a  $A$ . Además muestre que si  $f|_A$  es continua en  $x \in \overset{\circ}{A}$  entonces  $f$  es continua en  $x$ . Muestre con un ejemplo que la propiedad no es cierta si  $x \in \partial A$ .
- (b) Sea  $B \subseteq F$ ,  $B \neq \emptyset$  y consideremos la topología traza en  $B$ . Sea  $i_B : B \mapsto F$  la inyección canónica de  $B$  en  $F$ . Mostrar que una función  $\varphi : E \mapsto B$  es continua si y sólo si  $i_B \circ \varphi$  es continua.
- (c) Sea  $f : E \mapsto F$  una función y sea  $G$  su grafo (i.e.,  $G = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ ), dotado de la topología traza de  $E \times F$  sobre  $G$ . Sea  $g : E \mapsto G$  definida por  $g(x) = (x, f(x))$ . Muestre que  $f$  es continua si y sólo si  $g$  es un homeomorfismo.