

Trabajo dirigido #3 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Considere una función $f : E \mapsto \mathbb{R}$, donde E es un espacio topológico, y \mathbb{R} lo dotamos de la topología usual. Definimos los siguientes subconjuntos de $E \times \mathbb{R}$:

Grafo de f : $G_f = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda = f(x)\}.$

Epígrafo de f : $G_f^+ = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda > f(x)\}.$

Hipógrafo de f : $G_f^- = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda < f(x)\}.$

Considere f continua. Muestre que G_f^+ y G_f^- son abiertos y concluya que G_f es cerrado.

Problema 2. Sean E y F dos espacios topológicos.

- (a) Sea $f : E \mapsto F$ una función, $A \subseteq E$. En A consideramos la topología traza. Mostrar que si f es continua entonces $f|_A$ es continua, donde $f|_A$ es la restricción de f a A . Además muestre que si $f|_A$ es continua en $x \in \overset{\circ}{A}$ entonces f es continua en x . Muestre con un ejemplo que la propiedad no es cierta si $x \in \partial A$.
- (b) Sea $B \subseteq F$, $B \neq \emptyset$ y consideremos la topología traza en B . Sea $i_B : B \mapsto F$ la inyección canónica de B en F . Mostrar que una función $\varphi : E \mapsto B$ es continua si y sólo si $i_B \circ \varphi$ es continua.
- (c) Sea $f : E \mapsto F$ una función y sea G su grafo (i.e., $G = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$), dotado de la topología traza de $E \times F$ sobre G . Sea $g : E \mapsto G$ definida por $g(x) = (x, f(x))$. Muestre que f es continua si y sólo si g es un homeomorfismo.