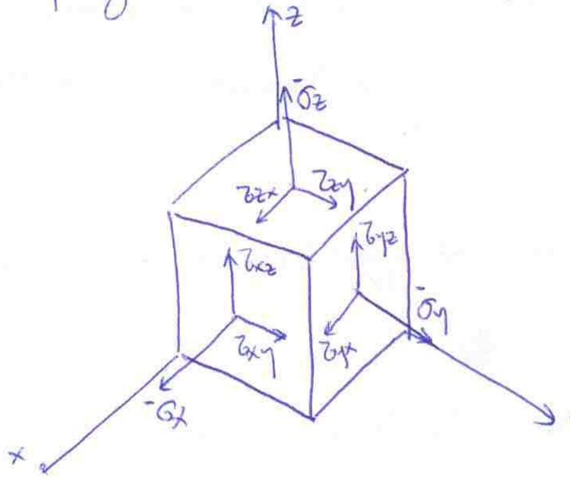
Geomecánica (clase aux 1)

Esfuerzos en un elemento de suelo:



σ: Esfuerzo normal a la superficie
τ: Esfuerzo de corte o cizalle.

En total existen 9 esfuerzos que representan el estado tensional de este elemento. La matriz (tensor) de tensiones, se escribe de la sgte forma:

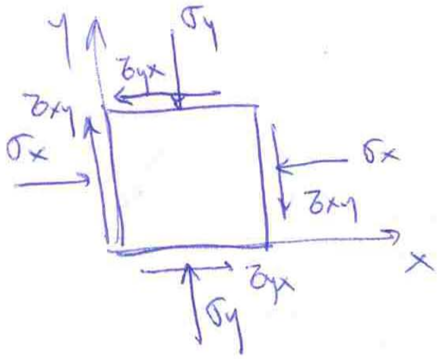
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\sigma].$$

La convención de signos a utilizar es la siguiente:

Compresión: $\sigma > 0$
Tracción: $\sigma < 0$

Los esfuerzos de corte cumplen lo sgte: $\tau_{ij} = \tau_{ji}\ \forall i,j = 1,\dots,3$.

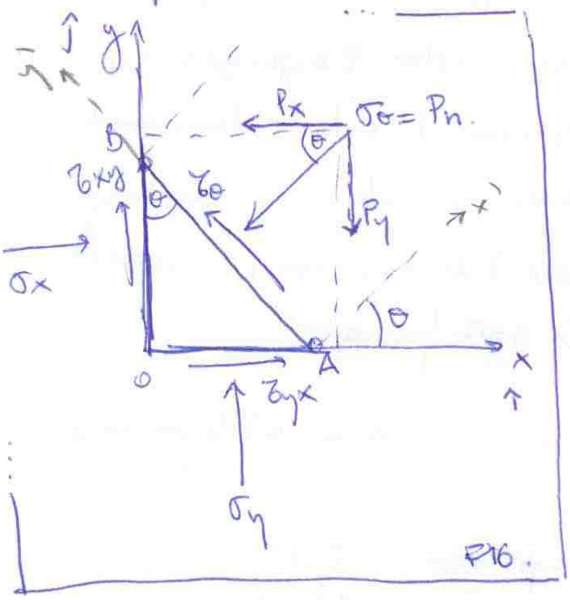
En suelos, generalmente para simplificar los problemas, los esfuerzos se reducen a un estado Bidimensional, ie.



$$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Tensiones en un plano

Se tiene un elemento bidimensional con un estado tensional cualquiera (al igual que el anterior), y se buscan los esfuerzos en un plano oblicuo:



Equilibrio de fuerzas (por ud. de ancho).

$\Sigma F = 0$:

$\hat{i})\ P_x \cdot \overline{AB} = \sigma_x \cdot \overline{OB} + \tau_{yx} \cdot \overline{OA}$

$\hat{j})\ P_y \cdot \overline{AB} = \tau_{xy} \cdot \overline{OB} + \sigma_y \cdot \overline{OA}$

Pero : $\overline{OA} = \overline{AB} \cdot \operatorname{sen}\theta$

$\wedge\ \overline{OB} = \overline{AB} \cdot \cos\theta$.

$\Rightarrow \hat{i})\ P_x = \sigma_x \cos\theta + \tau_{yx} \cdot \operatorname{sen}\theta \quad (1)$

$\hat{j})\ P_y = \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}\theta . \quad (2)$

Además :

$$\sigma_\theta = P_x \cos\theta + P_y \operatorname{sen}\theta \quad (3)$$

$$\wedge\ \tau_\theta = P_y \cdot \cos\theta - P_x \operatorname{sen}\theta . \quad (4)$$

De (1) en (3) y (2) en (3)

$$\Rightarrow \sigma_\theta = (\sigma_x \cos^2\theta + \tau_{yx} \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\theta) + (\tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\boxed{\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \quad (5)$$

De (1) en (4) y (2) en (4):

$$\Rightarrow \tau_\theta = \tau_{xy}\cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \sigma_x\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen}^2\theta.$$

$$\boxed{\tau_\theta = \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - (\sigma_x - \sigma_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \quad (6)$$

Recurriendo a las identidades trigonométricas:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta.$$

$$\operatorname{sen}2\theta = \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\wedge \cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\wedge \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$\Rightarrow$ en (5) y (6)

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cdot\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_y\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \tau_{xy}\cdot\operatorname{sen}(2\theta)$$

$$\therefore \boxed{\sigma_\theta = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos(2\theta) + \tau_{xy}\operatorname{sen}(2\theta)} \quad (A)$$

$$\wedge \boxed{\tau_\theta = \tau_{xy}\cdot\cos(2\theta) - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}(2\theta)} \quad (B)$$

Se puede obtener además, de igual forma, el esfuerzo en el eje $\perp$ a x'

$$\boxed{\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos(2\theta) - \tau_{xy}\operatorname{sen}(2\theta)} \quad (C)$$

//

Una observación: "La suma de tensiones normales es un invariante del estado de tensiones", i.e: $\boxed{\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}}$. $\in \mathbb{R}^2$

Direcciones principales:

Se obtienen cuando $\tau_{x'y'}=0$.

Pero $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}\cdot\cos(2\theta) - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cdot\sin 2\theta = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{tg(2\theta) = \frac{+2\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)}}$$

Utilizando las relaciones trigonométricas:

$$sen(2\theta) = \pm\frac{tg\,2\theta}{\sqrt{1+tg^2(2\theta)}} = \pm\frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2}}$$

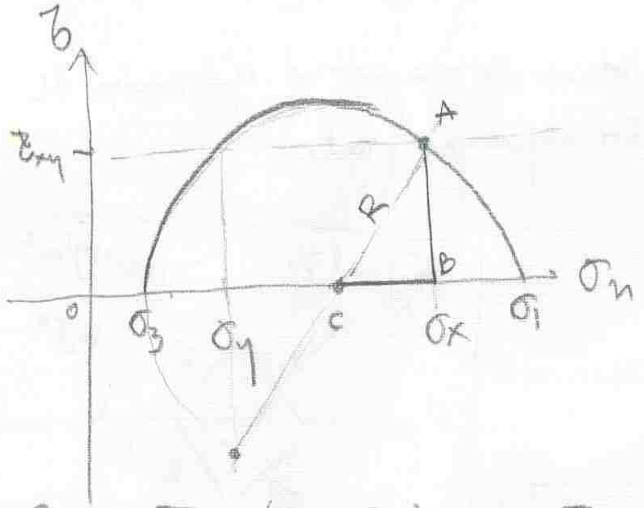
$$\wedge \cos 2\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(2\theta)}} = \pm\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}{\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2}}$$

se sustituyen en (A), (B) y (C).

Se obtienen, entonces, los valores de las tensiones ppales en fn del estado tensional inicial: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, sup σ_1 y σ_3.

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\\ \sigma_3 &= \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\end{aligned}}$$

Esto se puede visualizar directamente en un círculo de Mohr



$\overline{OC} = \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)$

lo que falta para encontrar σ_1, es sumar el radio al valor $|\overline{OC}|$

Pero $\overline{BC} = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \wedge \overline{BA} = \tau_{xy}$

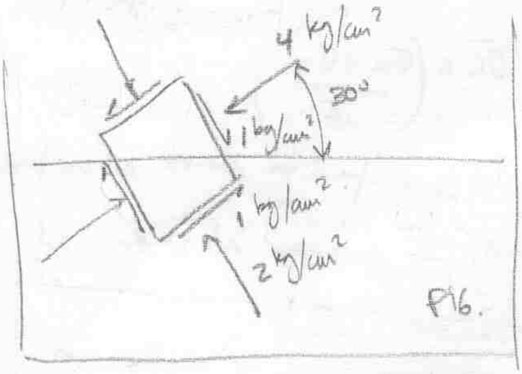
$$\Rightarrow \sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + R \quad , \text{donde } R^2 = \tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \quad //$$

Claramente, y se puede deducir, el esfuerzo de corte máximo, $\tau_{máx}$, se encuentra cuando $\sigma_x = \sigma_y$, que equivale a:

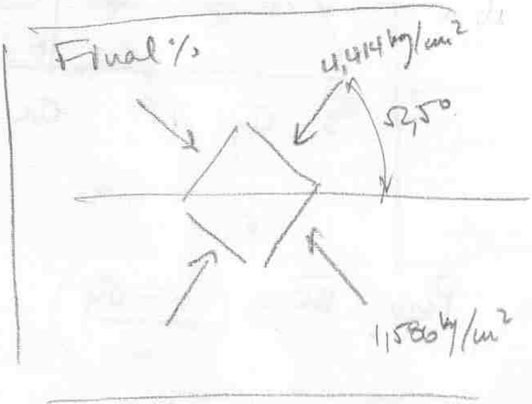
$\boxed{\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}$ (El ángulo formado es $2\theta = 90°$

$\Rightarrow \theta = 45°$

P1| Se tiene el sgte estado tensional de un elemento de suelo:



Obtener la magnitud y dirección de los esfuerzos ppales:



Sol: Recordar: $\sum \sigma_i = cte$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ kg/cm}^2}$$

En circulo de mohr: $\frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$ = Radio:

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{4+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + 1^2} = 3 + \sqrt{2} = 4{,}414 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \checkmark - \sqrt{\checkmark} = \frac{4+2}{2} - \sqrt{\checkmark} = 3 - \sqrt{2} = 1{,}586 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \frac{(\cancel{3}+\sqrt{2}) - (\cancel{3}-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} \text{ kg/cm}^2$$

La dirección principal se obtiene para $\frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = 0$

$$\Rightarrow tg(2\theta) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 1}{4-2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$2\theta = arctg(1) = 45° \Rightarrow \boxed{\theta = 22{,}5°}$$

Luego, el ángulo que forma la dirección principal mayor con la horizontal es $30 + \theta = 52{,}5°$ c/r al plano $\overline{DD}$