AUXILIAR 1 - MECÁNICA

12/03/2K+7

Profesora: Patricia Sotomayor
Auxs.: Sebastián Díaz
Ignacio Fantini

P1 | Una partícula se mueve de forma tal que la magnitud del vector posición $\vec{r}$ es constante. Demostrar que la velocidad de la partícula es perpendicular a $\vec{r}$.

Sol.: Lo resolveremos en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

→ Cartesianas

El vector posición $\vec{r}$ en coordenadas cartesianas se escribe:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

y la velocidad:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}.$$

La magnitud de $\vec{r}$ es constante:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = cte$$

luego su derivada con respecto al tiempo es nula:

$$\frac{d}{dt}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 \qquad (*)$$

Pero:

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} &= (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})\cdot(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) \\ &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= 0 \qquad (\text{por } (*))\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$$

→ Cilíndricas

El vector posición y la velocidad son respectivamente:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$

Como $\|\vec{r}\| = cte \wedge \|\vec{r}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, luego:

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}\| = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sqrt{\rho^2+z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\rho\dot{\rho} + 2z\dot{z}}{2\sqrt{\rho^2+z^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \rho\dot{\rho} + z\dot{z} = 0 \quad (\Delta)$$

Por otra parte:

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = (\rho\hat{\rho} + z\hat{k})\cdot(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k})$$

$$= \rho\dot{\rho} + z\dot{z}$$

$$= 0 \qquad (\text{por } (\Delta))$$

$$\therefore \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$$

Vemos que en ambos sistemas (de hecho en todos los posibles) se cumple la ortogonalidad entre $\vec{r}$ y $\dot{\vec{r}}$.

P2| Una partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio b. Si la velocidad de la partícula varía en el tiempo según $v(t) = At^2$. ¿Para qué valor, o valores del tiempo el vector aceleración forma un ángulo de $\pi/4$ con el vector velocidad?

Sol.: Ubicando la circunferencia en el plano $z=0$ y utilizando coordenadas cilíndricas, el vector posición será:

$$\vec{r} = b\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = b\dot{\phi}\hat{\phi}$$
$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = b\ddot{\phi}\hat{\phi} - b\dot{\phi}^2\hat{\rho}$$

Notando que $\dot{\vec{r}} = b\dot{\phi}\hat{\phi}$ y que $\hat{\phi}$ es unitario, concluimos:

$$v(t) = b\dot{\phi} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} At^2 = b\dot{\phi} \\ 2At = b\ddot{\phi} \end{array}}_{(*)} \quad \begin{array}{l} \text{(del enunciado)} \\ \text{(derivando c/r al tiempo)} \end{array}$$

Utilizando $(*)$ podemos escribir $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$ en función del tiempo

$$\dot{\vec{r}} = At^2\hat{\phi} \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}\| = At^2$$
$$\ddot{\vec{r}} = 2At\hat{\phi} - \frac{A^2}{b}t^4\hat{\rho} \Rightarrow \|\ddot{\vec{r}}\| = At\sqrt{4 + \frac{A^2}{b^2}t^6}$$

Llamemos $\beta\ (=\beta(t))$ al ángulo que forman $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$, se verifica:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \|\dot{\vec{r}}\|\,\|\ddot{\vec{r}}\|\cos\beta$$
$$\Rightarrow (At^2\hat{\phi}) \cdot \left(2At\hat{\phi} - \frac{A^2}{b}t^4\hat{\rho}\right) = A^2t^3\sqrt{4 + \frac{A^2}{b^2}t^6}\cos\beta$$
$$\Rightarrow 2\cancel{A^2}\cancel{t^3} = \cancel{A^2}\cancel{t^3}\sqrt{4 + \frac{A^2}{b^2}t^6}\cos\beta$$
$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{A^2}{b^2}t^6}}$$

Impongamos $\beta(t^*) = \frac{\pi}{4}$ (es decir, el ángulo que forman $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$ toma el valor $\frac{\pi}{4}$ para algún tiempo t^*) en la última ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos[\beta(t^*)] = \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{A^2}{b^2}t^{*6}}}$$

Despejando t^* se obtiene el tiempo pedido:

$$t^* = \left(\frac{4b^2}{A^2}\right)^{1/6}$$

P3| Una partícula se mueve con rapidez constante v_0 a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$, c constante positiva. Encuentre expresiones para la velocidad y la aceleración cuando la partícula se encuentra en la posición $(x_0, y_0 = cx_0^2)$.

Sol.: Como el movimiento ocurre en un plano (el plano xy) escogemos $z=0$, así nuestro vector posición será: $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. Pero sabemos que $y = cx^2$, luego:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + cx^2\hat{\jmath} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath} + 2cx\dot{x}\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{\imath} + 2c(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\hat{\jmath}$$

Pero del enunciado sabemos que:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = v_0 \Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2 + 4c^2x^2\dot{x}^2} = v_0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}} \\ &\Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{-4c^2v_0x\dot{x}}{(1+4c^2x^2)^{3/2}} = \frac{-4c^2v_0^2x}{(1+4c^2x^2)^2} \end{aligned}\right\} (\square)$$

Sustituyendo $(\square)$ en $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$ obtenemos:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}}\hat{\imath} + \frac{2cxv_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}}\hat{\jmath}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-4c^2v_0^2x}{(1+4c^2x^2)^2}\hat{\imath} + 2c\left(\frac{v_0^2}{1+4c^2x^2} + \frac{-4c^2v_0^2x^2}{(1+4c^2x^2)^2}\right)\hat{\jmath}$$

Y como $y = cx^2 \Rightarrow cy = c^2x^2$, así:

$$\dot{\vec{r}}(x,y) = \frac{v_0}{\sqrt{1+4cy}}\hat{\imath} + \frac{2cxv_0}{\sqrt{1+4cy}}\hat{\jmath}$$

$$\ddot{\vec{r}}(x,y) = \frac{-4c^2v_0^2x}{(1+4cy)^2}\hat{\imath} + \frac{2cv_0^2}{(1+4cy)^2}\hat{\jmath} \quad \text{(simplificado)}$$

Evaluando en $x = x_0$, $y = y_0$ se obtiene el resultado pedido.