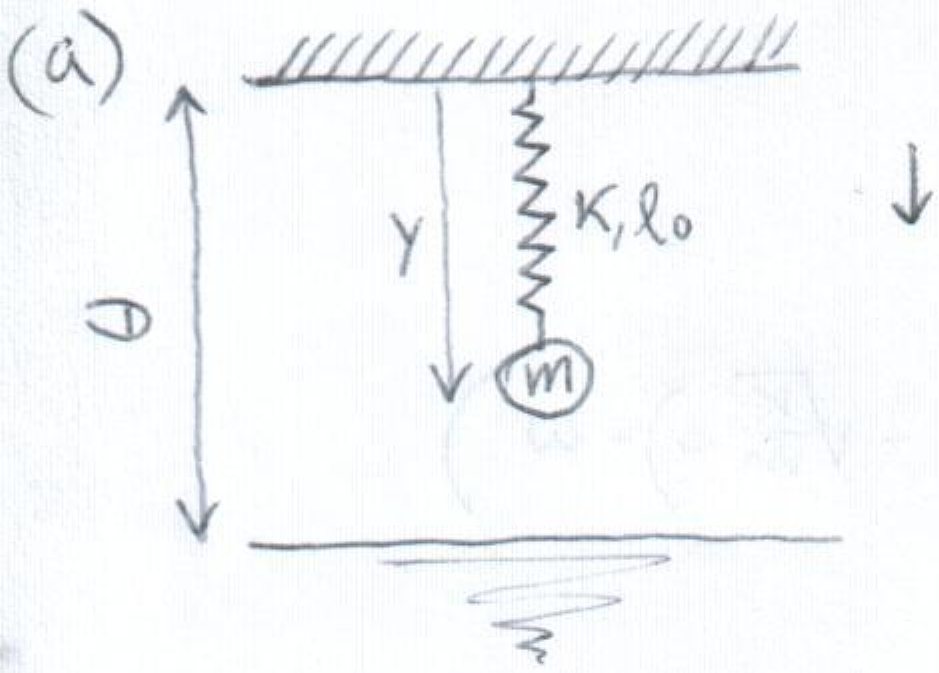
Solución Ejercicio 4

(a)



Estudiemos el movimiento en el trayecto fuera del fluido.

DCLm $\uparrow \vec{F}_e$ $\downarrow m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_e = mg\hat{j} - K(y-l_0)\hat{j}$$

Sólo habrá movimiento en el eje vertical, así que la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{y} = -K(y-l_0) + mg \quad 1.0$$

Reordenando:

$$\ddot{y} + \frac{K}{m}\left(y - l_0 - \frac{mg}{K}\right) = 0$$

Hacemos el cambio de variable: $\xi = y - l_0 - \frac{mg}{K} \Rightarrow \dot{\xi} = \dot{y}$, $\ddot{\xi} = \ddot{y}$. Nos queda la EDO:

$$\ddot{\xi} + \frac{K}{m}\xi = 0 \xrightarrow{\text{su solución es}} \xi(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \omega^2 \equiv \frac{K}{m}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $y(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) + l_0 + \frac{mg}{K}$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \omega\left[-A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)\right]$$

Las condiciones iniciales son $y(0) = l_0$, $\dot{y}(0) = 0$; con ellas calculamos A y B:

$$l_0 = y(0) = A + l_0 + \frac{mg}{K} \Rightarrow A = -\frac{mg}{K}$$

$$0 = \dot{y}(0) = \omega B \Rightarrow B = 0$$

Luego nuestra solución es:

$$y(t) = -\frac{mg}{K}\cos(\omega t) + l_0 + \frac{mg}{K} \quad 1.0$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \omega\frac{mg}{K}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Llamemos t^* al instante en que la masa llega a la superficie del fluido, luego:

$$D = y(t^*) \Rightarrow l_0 + \frac{mg}{K} = -\frac{mg}{K}\cos(\omega t^*) + l_0 + \frac{mg}{K} \Rightarrow \cos(\omega t^*) = 0 \quad 0.5$$

Si v es la velocidad con la que la masa llega a la superficie del fluido:

$$v = \dot{y}(t^*) = \omega\frac{mg}{K}\,\mathrm{sen}(\omega t^*) = \frac{\omega mg}{K}\sqrt{1 - \underbrace{\cos^2(\omega t^*)}_{0}} = \frac{\omega mg}{K} \quad 0.5$$

(b) Ahora estudiaremos el movimiento en el trayecto dentro del fluido.

DCLm $\uparrow \vec{F}_{rr}$ $\uparrow \vec{F}_e$ $\downarrow m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_{rr} = mg\hat{j} - K(y-l_0)\hat{j} - c\dot{y}\hat{j}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} = mg - K(y-l_0) - c\dot{y} \quad 1.0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}\left(y - l_0 - \frac{mg}{K}\right) = 0$$

Hacemos el cambio de variables $z = y - l_0 - \frac{mg}{K} \Rightarrow \dot{z} = \dot{y}$, $\ddot{z} = \ddot{y}$

Nos queda la ecuación:

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{K}{m}z = 0$$

El polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}$

Sus raíces son:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}\right]$$

Pero $c = 2\sqrt{km} \Rightarrow \frac{c^2}{m^2} = \frac{4km}{m^2} = \frac{4k}{m} \Rightarrow \frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = 0$

Entonces las raíces son iguales y su valor es $\lambda = -\frac{c}{2m}$ $\left(= -\frac{2\sqrt{km}}{2m} = -\sqrt{\frac{k}{m}} = -\omega\right)$

Estamos en el caso de un movimiento armónico críticamente amortiguado.

La solución de la EDO:

$$z(t) = Ce^{-\omega t} + \tilde{D}te^{-\omega t}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$y(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + Ce^{-\omega t} + \tilde{D}te^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = -\omega Ce^{-\omega t} + \tilde{D}e^{-\omega t} - \omega\tilde{D}te^{-\omega t}$$

Las condiciones iniciales de este movimiento son las encontradas en la parte (a), es decir,

$$y(0) = D = l_0 + \frac{mg}{k}, \quad \dot{y}(0) = v = \omega\frac{mg}{k}$$

Calculemos C y $\tilde{D}$:

$$l_0 + \frac{mg}{k} = y(0) = l_0 + \frac{mg}{k} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\omega\frac{mg}{k} = \dot{y}(0) = -\omega C + \tilde{D} \Rightarrow \tilde{D} = \frac{\omega mg}{k}$$

Finalmente, la solución queda:

$$y(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{\omega mg}{k}te^{-\omega t}$$

y como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega\frac{mg}{k} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{m}{k}g = \sqrt{\frac{m}{k}}g = \frac{g}{\omega}$

$$\therefore y(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{g}{\omega}te^{-\omega t}$$

1.0

Vemos que como $t \geq 0 \Rightarrow te^{-\omega t} \geq 0$

$$\Rightarrow y(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{g}{\omega}te^{-\omega t} \geq l_0 + \frac{mg}{k}$$

Es decir, la masa siempre está a una posición más baja o igual que la de la superficie del fluido ($D = l_0 + \frac{mg}{k}$). Pero notemos que:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Por lo tanto, a tiempo infinito se cumple que la masa llega a la superficie del fluido. En conclusión, la masa nunca sale del fluido, pues siempre está por debajo de la superficie de éste.

1.0