

Auxiliar - Martes 20 de Marzo

FI21A - Mecánica
Prof. Patricio Aceituno
Semestre Otoño 2007
por Kim Hauser

P1. Cinemática. (P1 control 1 -profesor Nicolás Mujica- Otoño 2006) Considere una curva espiral descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$r = R, \quad \phi = N\theta$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular zenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

- Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.
- Determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el ecuador ($\theta = 90^\circ$).
- Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación:** La integral resultante es difícil de calcular y la puede dejar expresada.

P2. Cinemática. (Ejercicio 1 -profesor Patricio Cordero- Otoño 2005) La trayectoria de un punto P , en coordenadas cilíndricas, se define con:

$$\rho(t) = \rho_0, \quad \theta(t) = ?, \quad z(t) = h - B\theta(t)$$

Se sabe que $\theta(t)$ es una función monótona, $\theta(0) = 0$ y que $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ y donde h , B y ω_0 son cantidades positivas conocidas.

- Obtenga las expresiones para los vectores velocidad y aceleración en este ejemplo.
- Obtenga una expresión para el vector tangente \hat{t} y para la rapidez de P . Comente sobre los signos de estas cantidades.
- Obtenga expresiones para las aceleraciones centrípeta y tangencial:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{centrip}(t) + \vec{a}_{tang}(t)$$

- ¿Cuál es la función $\theta(t)$ si se sabe que la aceleración apunta todo el tiempo perpendicular al eje Z ?

P3. Cinemática. (A.27 guía de P. Aceituno) Suponga que es posible excavar un túnel entre dos puntos A y B de la Tierra. La aceleración de gravedad, que apunta hacia el centro de la Tierra, tiene una magnitud que es proporcional a la distancia r :

$$|\vec{a}| = \frac{g}{R}r$$

donde g es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra y R es el radio de la Tierra. Asumiendo que un vehículo parte del reposo en el punto A y se mueve sin roce en el interior del túnel bajo el efecto de la gravedad, calcule:

- (a) El tiempo que requiere para llegar al punto B, que está a una distancia R en línea recta del punto A.
- (b) La rapidez máxima del movimiento resultante.

Coordenadas Esféricas.

Velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

Aceleración:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}$$