Solución:

Escritas en coordenadas esféricas, la fuerza total se escribe tan sólo como combinación de $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, lo que la componente esférica a_ϕ de la aceleración es cero, pero ella es la derivada de una expresión dada en el enunciado, por lo que tal expresión es constante y, debido a las condiciones iniciales se obtiene

$$\dot{\phi} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}$$

La fuerza $\vec{f}$ escrita en cartesianas es $f_x = -\frac{Bx}{x^2+y^2}$, $f_y = -\frac{By}{x^2+y^2}$, $f_z = 0$. De esta expresión es inmediato que $\vec{f}$ es conservativa ($\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$).

La normal es perpendicular al desplazamiento, por lo tanto el trabajo total se debe tan solo a las fuerza $\vec{f}$ y necesariamente la energía del sistema se conserva. Debiera ser fácil adivinar que $U(x,y) = -B/\sqrt{x^2+y^2}$ es la energía potencial adecuada porque

$$f_x \equiv -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{B\,x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

es la componente x de $-\frac{B\vec{\rho}}{\rho^3} = -\frac{B\hat{\rho}}{\rho^2}$

La energía total es la energía cinética más la energía potencial U asociada a $\vec{f}$. La energía cinética es

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}\right)^2$$

pero ya se tiene una expresión para $\dot{\phi}$ y $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$ por lo que

$$K = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^2}$$

Por lo tanto la energía total (conservada) es

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^2} - \frac{B}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Sobre la superficie del cono se satisface que $r^2 = (x^2+y^2)\sin\theta = (x^2+y^2)/\sqrt{2}$ por lo que la energía se puede escribir

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^2} - \frac{B}{r\sqrt{\sqrt{2}}}$$

En el instante en que $r(t)$ alcanza un extremo (máximo o mínimo) se tiene que cumplir que $\dot{r} = 0$. Puesto que E está fijo, en esos instantes se satisface la ecuación

$$E = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^2} - \frac{B}{r\sqrt{\sqrt{2}}}$$

la que obviamente tiene dos soluciones reales que definen presisamente a r_{max} y r_{min}.