Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Matemáticas Aplicadas, Sección 01
Profesor: *Juan Dávila B.*
Auxiliar: *Mauricio Duarte E.*

Teoremas sobre Integrales

21 de agosto de 2004

1. Teorema de Green en el plano

Sea $\mathcal{K}$ una región cerrada y acotada en el plano XY cuya frontera $\mathcal{C}$ se compone de un número finito de curvas suaves. Sean $F_1(x,y)$ y $F_2(x,y)$ funciones continuas y que tienen derivadas parciales $\partial F_1/\partial y$ y $\partial F_2/\partial x$ continuas en cualquier parte de un dominio que contiene a $\mathcal{K}$. Entonces

$$\iint_{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy; \tag{1.1}$$

aquí se integra a lo largo de la frontera completa $\mathcal{C}$ de $\mathcal{K}$ de tal modo que $\mathcal{K}$ está a la izquierda a medida que se avanza en la dirección de integración.

Comentario. : La fórmula (1.1) puede escribirse en forma vectorial

$$\iint_{\mathcal{K}} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{k} dxdy = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{r}, \tag{1.2}$$

donde $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath}$.
Otra manera es:

$$\iint_{\mathcal{K}} \nabla \vec{F} dxdy = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \hat{n} s, \tag{1.3}$$

donde $\vec{F} = F_2\hat{\imath} - F_1\hat{\jmath}$ y $\hat{n}$ es el vector normal a la curva $\mathcal{C}$ que apunta hacia afuera.

2. Teorema de la Divergencia

Sea $\mathcal{T}$ una región cerrada y acotada en el espacio cuya frontera es una superficie $\mathcal{S}$ suave por secciones y orientable. Sea $\vec{F}(x,y,z)$ una función vectorial que es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en algún dominio que contiene a $\mathcal{T}$. Entonces

$$\iiint_{\mathcal{T}} \nabla \vec{F} dV = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA \tag{2.1}$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal *exterior* a $\mathcal{S}$.

2.1. Corolarios. Teoremas de Green. Sean f y g funciones escalares tales que $\vec{F} = f\nabla g$ satisface los supuestos del teorema de la divergencia en alguna región $\mathcal{T}$. Entonces se tienen las relaciones vectoriales

$$\nabla\vec{F} = \nabla(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Además, puesto que f es una función escalar,

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot (f\nabla g) = f[\hat{n} \cdot \nabla g].$$

La expresión $\hat{n} \cdot \nabla g$ es la derivada direccional de g en la dirección del vector normal exterior $\hat{n}$ de la superficie $\mathcal{S}$ en el teorema de la divergencia. Si esta derivada se denota por $\partial g/\partial n$, la fórmula del teorema de la divergencia se convierte en la **"primera fórmula de Green"**

$$\iiint\limits_{\mathcal{T}} (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint\limits_{\mathcal{S}} f\frac{\partial g}{\partial n} dA. \tag{2.2}$$

La fórmula (2.2), junto con los supuestos se conoce como *primera forma del teorema de Green.*

Al intercambiar f y g se obtiene una fórmula similar. Al restar esta fórmula de (2.2) se obtiene

$$\iiint\limits_{\mathcal{T}} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA. \tag{2.3}$$

Esta expresión se conoce como la **segunda fórmula de Green** o (junto con los supuestos) como *segunda forma del teorema de Green.*

3. Teorema de Stokes

Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada y suave por secciones en el espacio y sea la frontera de $\mathcal{S}$ una curva cerrada simple y suave por secciones $\mathcal{C}$. Sea $\vec{F}(x, y, z)$ una función vectorial continua con primeras derivadas parciales continuas en un dominio del espacio que contiene a $\mathcal{S}$. Entonces

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{r}'(s)s \tag{3.1}$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a $\mathcal{S}$ y, dependiendo de $\hat{n}$, la integración alrededor de $\mathcal{C}$ se toma en el sentido de la regla de la mano derecha; además, $\vec{r}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$ es el vector tangente unitario y s parámetro de la curva $\mathcal{C}$.