P1.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+4+4^2+4^3+\ldots+4^{k-1}\binom{n}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}4^i\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k-1}4^i$$

Pues el n sobre k no depende de i. Usamos ahora la formula de la suma geometrica sobre la suma interior.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1-4^k}{1-4} &= \frac{1}{3}\left(-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k-1\right)\end{aligned}$$

En cada suma hemos agregado el termino para $k=0$, entonces ahora completamos el Binomio de Newton:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k1^{n-k}\right) &= -\frac{1}{3}(1+1)^n+\frac{1}{3}(4+1)^n\\ &= \frac{1}{3}(-2^n+5^n)\end{aligned}$$

Que era lo que queriamos demostrar.

P3. Opción 1: Para $i\in\mathbb{N}$ consideremos:

$$A_i=\left\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z}, x=\frac{k}{3^i}\right\}$$

Asi $A=A_1\cup A_2\cup\ldots$. Entonces si cada A_i es numerable, A lo es. Para cada A_i podemos tomar $f_i:A_i\to\mathbb{Z}$ con $f_i(x)=k$, se ve que es biyectiva y por tanto $|A_i|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$. Con esto se tiene lo pedido.

Opción 2: Podemos considerar A como con un subconjunto infinito de un conjunto numerable y entonces se tiene la propiedad buscada:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{Z},\exists i\in\mathbb{N},\ x=\frac{k}{3^i}\right\}\subseteq\mathbb{Q}$$

Y es infinito pues $A_1\subseteq A$ lo es.

P5a. Primero escribamos una recta no vertical:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Donde (x_1,y_1) (x_2,y_2) son dos puntos por los que pasa, con $x_1\neq x_2$. En este caso nos interesan las que pasan por el punto $(0,1)$ y cortan al eje OX en un punto racional, sea $(q,0)$ ese punto (notemos que $q\neq 0$), luego nos queda:

$$y-1=\frac{0-1}{q-0}(x-0)$$

$$y=-\frac{x}{q}+1$$

Con esto el conjunto de "todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0,1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional" queda como:

$$A = \left\{ y = -\frac{x}{q} + 1 : q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \right\}$$

Ahora consideramos $f : A \to \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ con $f\left(y = -\frac{x}{q} + 1\right) = q$, vemos que es bijectiva y luego $|A| = |\mathbb{Q}\backslash\{0\}| = |\mathbb{N}|$ pues en catedra vieron que quitandole un punto a conjunto numerable queda numerable.

P5b. Analagomente tomemos $(x_1, y_1) = (0, q)$ y $(x_2, y_2) = (s, 0)$ los puntos de interseccion con los ejes OY y OX respectivamente, luego el conjunto en cuestión nos queda:

$$A = \left\{ y = -\frac{s}{q}(x - q) : q, s \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \right\}$$

Definimos para $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$:

$$A_q = \left\{ y = -\frac{s}{q}(x - q) : s \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \right\}$$

Por los mismos argumentos que en la parte anterior A_q es numerable y asi $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}} A_q$ es numerable pues es union numerable de conjuntos numerables.

P7. Veamoslo por contradicción. La negacion de $\exists\ l, j \in \mathbb{N}, l \neq j,\ tq\ x_l = x_j$ queda como $\forall\ l, j \in \mathbb{N}, l \neq j\ se\ tiene\ x_l \neq x_j$. Consideremos $f : \mathbb{N} \to A$ como $f(j) = x_j$, con x_j el elemento $j-esimo$ de la secuencia que nos dan. Veamos que f es inyectiva:

Sea l, j tq $f(l) = f(j),\ ie,\ x_l = x_j$ entonces $l = j$ pues supusimos no existen l, j con esta propiedad. Asi f es inyectiva, por lo que $|N| \leq |A| = n$, lo que es una contradicción.