**P2a.** Si definimos el conjunto $A' = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. Probemos que $A'$ es no numerable, y con esto $A$ tampoco lo será, pues $A' \subseteq A$. Para ello:

**Opción 1:** Consideramos la función $f : \mathbb{R} \to A'$ dada por $f(x) = (x, -x, 1)$. Es fácil demostrar que $f$ es inyectiva, luego $|\mathbb{R}| \leq |A'|$ y entonces $A'$ es no numerable.

**Opción 2:** Consideramos la función $g : \mathbb{R}^2 \to A'$ dada por $g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2)$. Es igualmente fácil mostrar que $g$ es inyectiva, luego $|\mathbb{R}^2| \leq |A'|$. Notar que $R^2$ es no numerable (pues $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x, 0)$ es inyectiva), luego $A'$ también lo es.

**P2b. Opción 1:** Consideremos la función $F : \mathbb{R} \to \mathcal{T}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(x, 1)$.

Esta función es claramente inyectiva: Si $F(x) = F(y)$, recordando que esta es una igualdad de triángulos, tenemos que sus tres vértices deben ser iguales. De aquí concluimos que el vértice $(x, 1)$ de $F(x)$ es igual al vértice $(y, 1)$ de $F(y)$, y entonces $x = y$. Concluimos que $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{T}|$, por lo tanto $\mathcal{T}$ es no numerable.

**Opción 2:** En vez de mover un vértice del triángulo, podemos mover un ángulo. Definamos la función $G : \mathbb{R}^* \to \mathcal{T}$, donde para cada $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $G(\alpha)$ es el triángulo delimitado por el eje OX, el eje OY y la recta $y = \alpha \cdot x + 1$. Esta función $G$ también es inyectiva, y concluimos como arriba que $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{T}|$.

**P6a.** Tomemos otros representantes de ambas clases: sean $x' \in [x]_{\mathcal{R}}\,, y' \in [y]_{\mathcal{R}}$. Debemos demostrar que $[x * y]_{\mathcal{R}} = [x' * y']_{\mathcal{R}}$, es decir que $(x * y)\mathcal{R}(x' * y')$. Esto se sigue directamente de la hipótesis que tenemos sobre la relación $\mathcal{R}$, pues si $x' \in [x]_{\mathcal{R}}$ e $y' \in [y]_{\mathcal{R}}$ entonces $x\mathcal{R}x'$ e $y\mathcal{R}y'$.

**P6b.** Si $e \in E$ es el neutro de $*$, proponemos a $[e]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$ como neutro de $\otimes$. Sea $[x]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$ una clase cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} [x]_{\mathcal{R}} \otimes [e]_{\mathcal{R}} &= [x * e]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}} \\ [e]_{\mathcal{R}} \otimes [x]_{\mathcal{R}} &= [e * x]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

por lo que concluimos que efectivamente, $[e]_{\mathcal{R}}$ es neutro para $\otimes$.

**P6c.** Supongamos que $[a]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$ tiene inverso, y que éste es $[b]_{\mathcal{R}}$. Entonces $[a]_{\mathcal{R}} \otimes [b]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}}$, es decir $[a * b]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}}$ lo que equivale a que $(a * b)\mathcal{R}e$. Es decir, $[a]_{\mathcal{R}}$ será invertible si existe un $b \in E$ tal que $(a * b)\mathcal{R}e$.

Si suponemos que $a \in E$ posee inverso para $*$ (el cual llamamos $b$), entonces notamos que $a * b = e$, y como $\mathcal{R}$ es refleja, tenemos que $(a * b)\mathcal{R}e$, luego $[a]_{\mathcal{R}}$ es invertible por lo dicho arriba. Su inverso es $[b]_{\mathcal{R}}$. Recordando que $a * b = e$, entonces obtenemos que $b = a^{-1}$, o sea el inverso de $[a]_{\mathcal{R}}$ es $\left[a^{-1}\right]_{\mathcal{R}}$.

**P6d. Ejemplo 1:** Tomemos la estructura algebraica $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Notar que aquí el neutro es 1, y los únicos elementos invertibles son 1 y $-1$. Consideremos la relación de congruencia módulo 5 que denotamos $\equiv_5$, con lo que nos queda el conjunto cuociente $\mathbb{Z}_5$ y la operación $\cdot_5$. Notar que $[3]_5$ es invertible en $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ (su inverso es $[2]_5$) a pesar de que 3 no es invertible en $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

**Ejemplo 2:** Sea $(A, *)$ una estructura algebraica cualquiera tal que existe $w \in A$ no invertible.

Definamos la relación trivial $\mathcal{R}$ en $A$ tal que $x\mathcal{R}y$ para todo $x, y \in A$, la cual es de equivalencia. Entonces, $A/\mathcal{R} = \{[w]_{\mathcal{R}}\}$ (pues $[w]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}}$ para todo $x \in A$). Aquí la l.c.i. $\otimes$ es trivial: $[w]_{\mathcal{R}} \otimes [w]_{\mathcal{R}} = [w]_{\mathcal{R}}$, por lo que $[w]_{\mathcal{R}}$ es neutro de $(A/\mathcal{R}, \otimes)$ y entonces es invertible a pesar de que $w$ no lo era para $*$.