P1. Estudiemos los elementos que pertenecen a E. Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ luego (por definición) $\exists n \in \mathbb{N}\ tq\ x_1 + x_2 + x_3 = n,\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

Así $x_1 = n - x_2 - x_3 \in \mathbb{Z}$ pues $x_2, x_3, n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y este último es cerrado para la suma. Con esto $E \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es finito o numerable pues es subconjunto de un conjunto numerable.

Sólo nos falta ver que E es infinito: para esto podemos considerar $x_{1,m} = x_{2,m} = x_{3,m} = m \in \mathbb{N}$ luego $\exists\ n = 3m$ tq $x_{2,m} + x_{3,m} + x_{3,m} = n \Rightarrow x_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}) \in E$ como estos x_m son infinitos, E lo es.

P5. Antes de comenzar, notemos que $\forall\ f \in \mathcal{F},\ \exists f^{-1} \wedge f^{-1} \in \mathcal{F}$, esto por propiedades ya vistas.
a. Sean $f, g \in \mathcal{F}$ queremos probar que $f \star g \in \mathcal{F}$. Tenemos que $f \star g = f \circ g$ es claro que como $f, g \in \mathcal{F}$ entonces $f \circ g$ va desde A a A, además de materias ya pasadas sabemos que composicion de funciones biyectivas también es biyectiva, luego $f \circ g$ va desde A a A y es biyectiva, ie, $f \circ g \in \mathcal{F}$.
b. Sean $f, g, h \in F$. pdq $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$

$$\begin{aligned} f \star (g \star h) &= f \circ (g \circ h) \\ &= (f \circ g) \circ h \qquad \text{(Asociatividad de la composición)} \\ &= (f \star g) \star h \end{aligned}$$

Que era lo que queriamos demostrar.
c. Sea $f, g \in \mathcal{F}$. pdq $f \star g = g \star f$.

$$f \star g = f \circ g \neq g \circ f = g \star f$$

Pues la composición no es conmutativa (aunque para algunas f, g particulares se tenga).
d. Buscamos $e \in \mathcal{F}$ tq $\forall\ (f \in \mathcal{F}), f \star e = e \star f = f$. Para empezar, supongamos existe este e luego:

$$\begin{aligned} f \star e &= f \\ f \circ e &= f \quad /f^{-1} \circ \\ id_A \circ e &= id_A \\ e &= id_A \end{aligned}$$

Así e deberia ser la identidad de A. Veamos que sirve también por la izquierda:

$$e \star f = id_a \star f = id_a \circ f = f$$

Luego tomando $e = id_a$ tenemos lo buscado, ie, id_a es el neutro de $(\mathcal{F}, \star)$
e. Para cada $f \in \mathcal{F}$ buscamos $f^{-1\star}$ tal que $f \star f^{-1\star} = f^{-1\star} \star f = e = id_a$. Notemos que a priori $f^{-1} \neq f^{-1\star}$. Supongamos existe este inverso:

$$\begin{aligned} f \star f^{-1\star} &= id_A \\ f \circ f^{-1\star} &= id_A \quad /f^{-1} \circ \\ f^{-1} \circ f \circ f^{-1\star} &= f^{-1} \circ id_A \\ id_A \circ f^{-1\star} &= f^{-1} \\ f^{-1\star} &= f^{-1} \end{aligned}$$

Probemos que $f^{-1\star} = f^{-1}$ también sirve por la izquierda:

$$f^{-1\star} \star f = f^{-1} \star f = f^{-1} \circ f = id_A$$

Con esto demostramos que efectivamente $f^{-1\star} = f^{-1}$, como f^{-1} existe para toda $f \in \mathcal{F}$, siempre vamos a poder tomar $f^{-1\star} = f^{-1}$ con lo que todo elemento en $\mathcal{F}$ tiene inverso para $\star$.

f. Buscamos elementos del tipo $f \star f = f$. Nuevamente supongamos existe al menos un f que cumple esto:

$$\begin{aligned} f \star f &= f \\ f \circ f &= f \quad /f^{-1} \circ \\ f &= id_A \end{aligned}$$

Luego si exite algún elemento idempotente debe ser la identidad. Así id_A es el único idempotente en $(\mathcal{F}, \star)$.