Problema 2:

Considere el conjunto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d),$$

donde $+$ y $\cdot$ son la suma y la multiplicación usual en $\mathbb{Z}_2$.

Definamos también la operación

$$(a, b) * (c, d) = (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d).$$

Usando el hecho de que $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un cuerpo pruebe que:

a) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y con unidad ¿Es un cuerpo? Justifique su respuesta.

b) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, *)$ es un cuerpo.

c) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, *)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$, es decir, no existe ningun morfismo biyectivo entre $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, *)$ y $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$.

P3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo (no necesariamente con unidad). Para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ se define:

$$na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0; \ 0a = 0_A \in A \ \text{ si } n = 0$$
$$\text{y} \quad na = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-n \text{ veces}} \ \text{ si } n < 0$$

Además, puede usar, sin demostrar que, $(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\forall a, b \in A)$ $(n + m)a = na + ma$; $n(ma) = nma$; $a(nb) = nab$.

Considere en $\mathbb{Z} \times A$ las leyes suma y producto definidas por:

Suma: $(n, a) \oplus (m, b) = (n + m, a + b)$

Producto: $(n, a) \odot (m, b) = (nm, nb + ma + ab)$

i) Demuestre que $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad.

ii) Demuestre que las funciones

$$\begin{array}{llll} f : A \to \mathbb{Z} \times A & & \text{y} & g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times A \\ \quad a \to f(a) = (0, a) & & & \quad n \to g(n) = (n, 0_A) \end{array}$$

son homomorfismos inyectivos de los anillos $(A, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ respectivamente.

iii) Considere en lugar de $(A, +, \cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ Muestre que el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero

Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ un cuerpo?

P. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo finito (i.e.,$|A| < +\infty$) sin divisores de cero.

1. Pruebe que $\exists\ p \in \mathbb{N}$, tal que $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p\ veces} = 0$

2. Pruebe que si $a, b\ \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, entonces

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a\ \cdot\ b\ veces} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{1+1+\ldots+1}_{a\ veces} = 0 \vee \underbrace{1+1+\ldots+1}_{b\ veces} = 0$$

3. Pruebe que si $|A| > 1$ entonces el menor p que cumple (1) es primo.