

1. Para $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}}$. Como A es anillo, $a_n \in A$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Como A es finito debe existir $n \neq 0$ tal que $a_n \in \{a_1 \dots a_{n-1}\}$, esto quiere decir que en algun momento a_n se repite pues A es finito (si no se repite, habrian $|A|$ elementos en A , lo que contradice su finitud). Luego, existen $n > m > 0$ tales que $a_n = a_m$, i.e., $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m \text{ veces}}$, por lo tanto, $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p = (n-m) \text{ veces}} = 0$.

2. Por distributividad del \cdot respecto a $+$, se tiene que:

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{a \text{ veces}} \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{a \text{ veces}}$$

Luego, como A no tiene divisores de 0, sigue que:

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} = 0 \Rightarrow \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{a \text{ veces}} = 0 \vee \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{a \text{ veces}} = 0$$

3. Supongamos que el menor p de (1) no es primo. Luego $\exists a, b \in \mathbb{N}$, con $a, b < p$ tq $a \cdot b = p$. Por la parte anterior, ó a ó b cumple (1), pero $a < p \wedge b < p$ lo que contradice la minimalidad de p . Asi p debe ser primo.