MA26B. Matemáticas Aplicadas.

Tarea 1.

Prof. Alberto Mercado
Aux. Miguel Concha, Germán Ibarra.
25 de marzo de 2007

1. Calcular la velocidad y la rapidez de cada una de las curvas. Encontrar la parametrización de la recta tangente en el punto indicado.

   a) $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(2t))$, $t = 0$.
   b) $\vec{\gamma}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$, $t = 0$.
   c) $\vec{\gamma}(t) = t\operatorname{sen}(t)\hat{\imath} + t\cos(t)\hat{\jmath} + \sqrt{3}t\hat{k}$, $t = 0$.
   d) $\vec{\gamma}(t) = t\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + \frac{2}{3}t^{3/2}\hat{k}$, $t = 9$.

2. Encontrar la trayectoria que parte del punto $(0, -5, 1)$ y que tiene velocidad $\vec{v}(t) = (t, e^t, t^2)$.

3. Una partícula se mueve según la trayectoria $\vec{\gamma}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 3t)$, y sale por la tangente en $t = 2$. Calcule su posición en $t = 3$.

4. Considere la curva Γ parametrizada por la función $\vec{\gamma} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{\gamma}(t) = (|t|, |t - 1/2|, 0).$$

   Pruebe que Γ es regular por pedazos y encuentre su longitud de arco. Realice un bosquejo.

5. Sea $\vec{\gamma} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización (no necesariamente en longitud de arco) de la curva regular Γ. Demuestre que la curvatura y torsión están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{[\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)] \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2}$$

6. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva suave parametrizada por $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, y sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Demuestre que

   - Si F es ortogonal a $\vec{\gamma}'(t)$ en $\vec{\gamma}(t)$ para todo $t \in [a, b]$ entonces

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = 0.$$

   - Si F es paralelo a $\vec{\gamma}'(t)$ en $\vec{\gamma}(t)$ (i.e. $F(\vec{\gamma(t)}) = \lambda(t)\vec{\gamma}'(t)$ con $\lambda(t) \geq 0$) para todo $t \in [a, b]$ entonces

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \|F\| d\vec{r}.$$

- Si $\|F\| \leq M$ y $L(\Gamma)$ denota la longitud de Γ, entonces

$$\left| \int_\Gamma F \cdot d\vec{r} \right| \leq ML(\Gamma).$$

7. Considere el campo gravitacional dado por

$$F(x,y,z) = -\frac{GmM}{\|\vec{r}(x,y,z)\|^3}\vec{r}(x,y,z)$$

donde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$, y G, m, M son constantes dadas. Muestre que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional en una partícula que se mueve del punto $\vec{x}_1$ hacía el punto $\vec{x}_2$ sólo depende de las normas de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$.

8. Dada una curva regular Γ con vector tangente unitario T, ¿Qué resulta la integral $\displaystyle\int_\Gamma T \cdot d\vec{r}$?.

9. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 (con D abierto). Demuestre que $G(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$, el **grafo** de f, es una superficie regular.

10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1.

    - Parametrice la superficie generada al rotar el grafo de f alrededor del **eje** x. Demuestre que su área es igual a

    $$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

    - Parametrice la superficie generada al rotar el grafo de f alrededor del **eje** y. Demuestre que su área es igual a

    $$A = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

11. Sea S la superficie generada al rotar el grafo de $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$ alrededor del eje x. Demuestre que S tiene área infinita, mientras que el volumen encerrado entre esta superficie y el plano $x = 1$ es finito. (En otras palabras, esta superficie se puede llenar, pero no pintar).

12. Sea S la superficie dada por el grafo de la función $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua, demuestre la siguiente fórmula para la integral de f sobre S:

$$\int_S f dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos(\theta)} dxdy$$

donde $\theta = \theta(x, y, z)$ es el ángulo formado por la **normal a la superficie** con el **vector unitario** $\vec{k} = (0, 0, 1)$ en el punto $(x, y, g(x, y))$.

Interprete geométricamente.

13. Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima del plano $z = 2y$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y\}$.

    a) Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie.

    b) Parametrice el borde geométrico ∂S de S, y las siguientes rectas tangentes a ∂S: la que pasa por el punto $(1, 0, 0)$, y la que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$.

    c) ¿Puede decir cuál es la superficie $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ de **área mínima** cuyo borde es ∂S?. Encuentre una parametrización de S_1.

    d) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 + z^2)\hat{\imath} + (e^{-x^2} - 2)\hat{\jmath} + (2e^{-x^2} + 1)\hat{k}$ sobre la superficie S_1 orientada con la normal **exterior** a la superficie **cerrada** $S \cup S_1$.