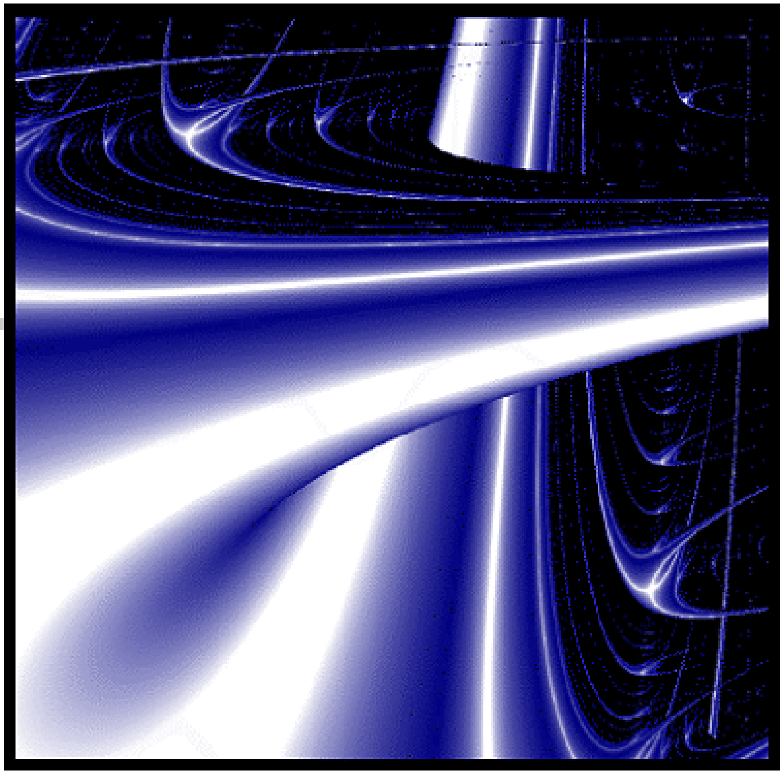
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

CÁLCULO NUMÉRICO



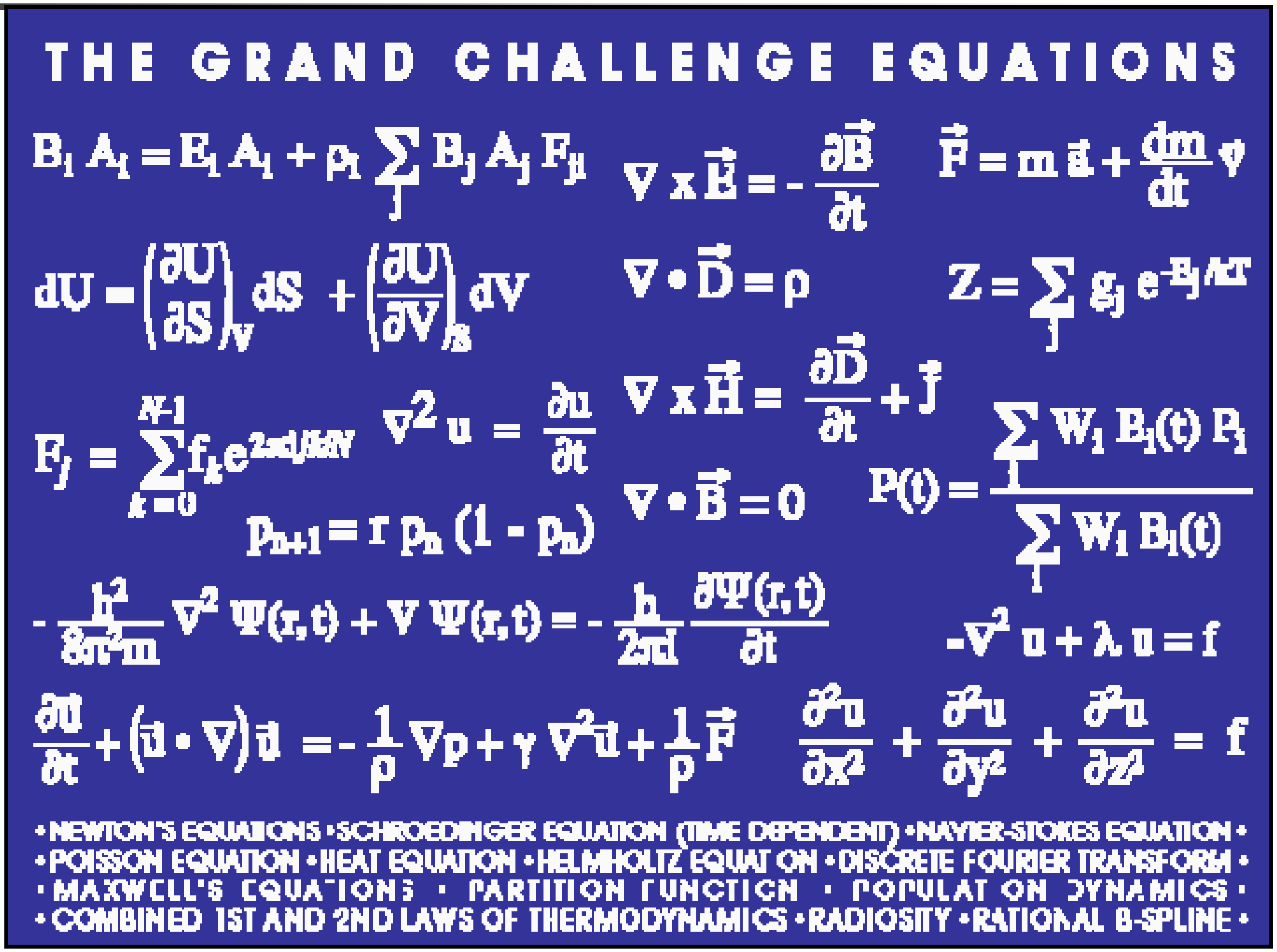
Semestre 2007-1

GONZALO HERNÁNDEZ OLIVA

MA-33A: Cálculo Numérico

1) Por qué estudiar CN ?
2) Motivación: Aproximación, Modelación y Edo
3) Organización de la Sesiones
4) Evaluación Asignatura
5) Objetivos de la Asignatura
6) Programa del Curso
7) Bibliografía

1) Por qué estudiar CN ?



1) Por qué estudiar CN ?

- CN es una de la 3 Matemáticas Aplicadas que los Ingenieros aplican para resolver problemas y estudiar sistemas complejos
- Otras Matemáticas Aplicadas:

  Probabilidades y Estadística

  Optimización

2) Motivación 1: Polinomio de Taylor

- Teorema de Taylor: Suponga que:

$f \in \mathbb{C}^n[a,b], f^{(n+1)}$ existen en $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$

$(\forall x \in [a,b])(\exists \xi(x) \in [x_0, x])$ tal que:

$$\boxed{f(x) = p_n(x) + R_n(x)}$$

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

2) Motivación 1: Polinomio de Taylor

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	e^x
1	2	2.5	2.666666	2.7083333	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.6484375	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.3495	1.3498375	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10516667	1.10517083	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.01005017	1.01005017	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050000	1.00100050017	1.00100050016

2) Motivación 1: Polinomio de Taylor

- Determine el polinomio de Taylor de segundo y tercer orden para la función:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

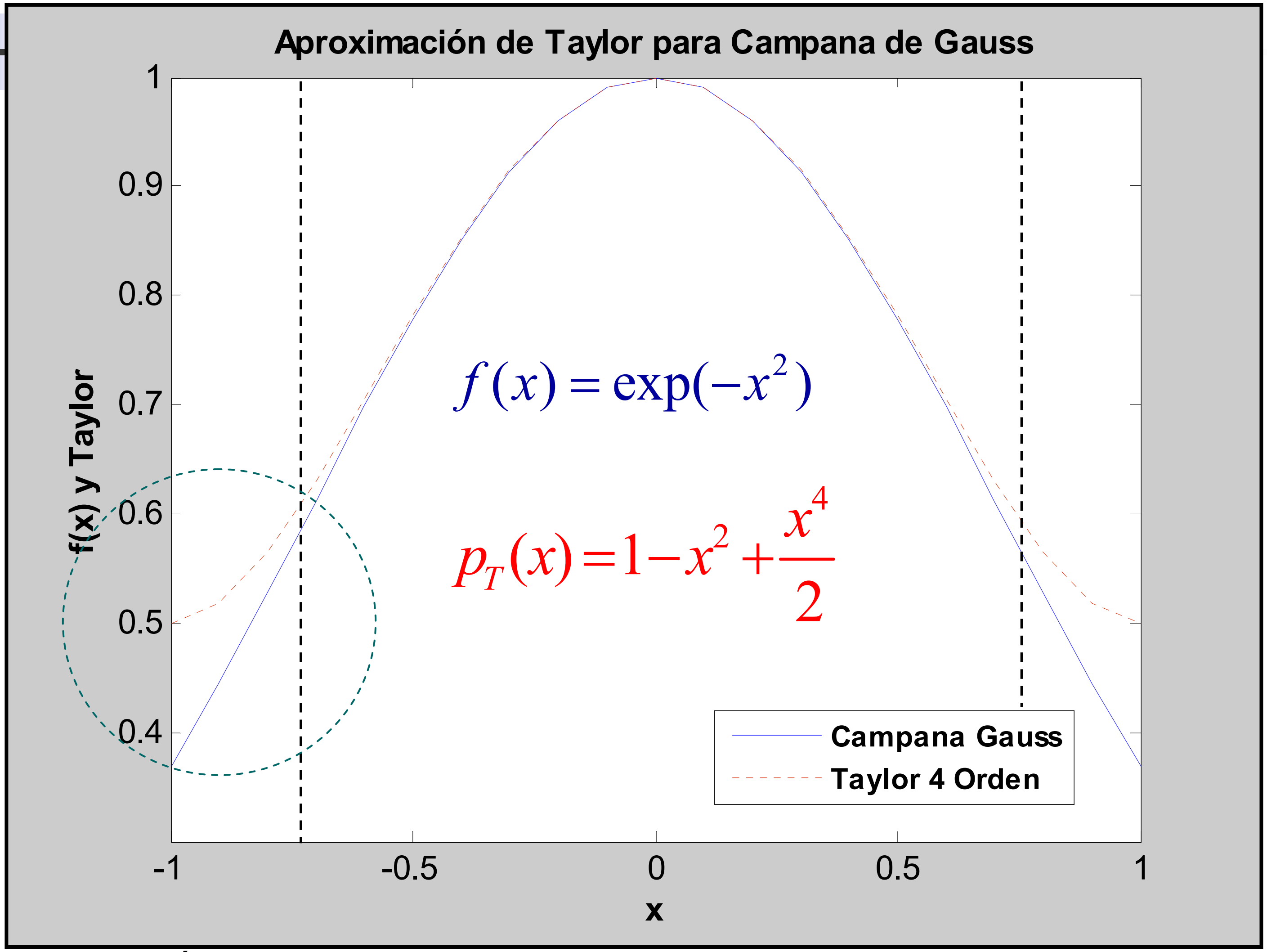
en torno a $x_0 = 0$

- Utilice este polinomio para calcular:

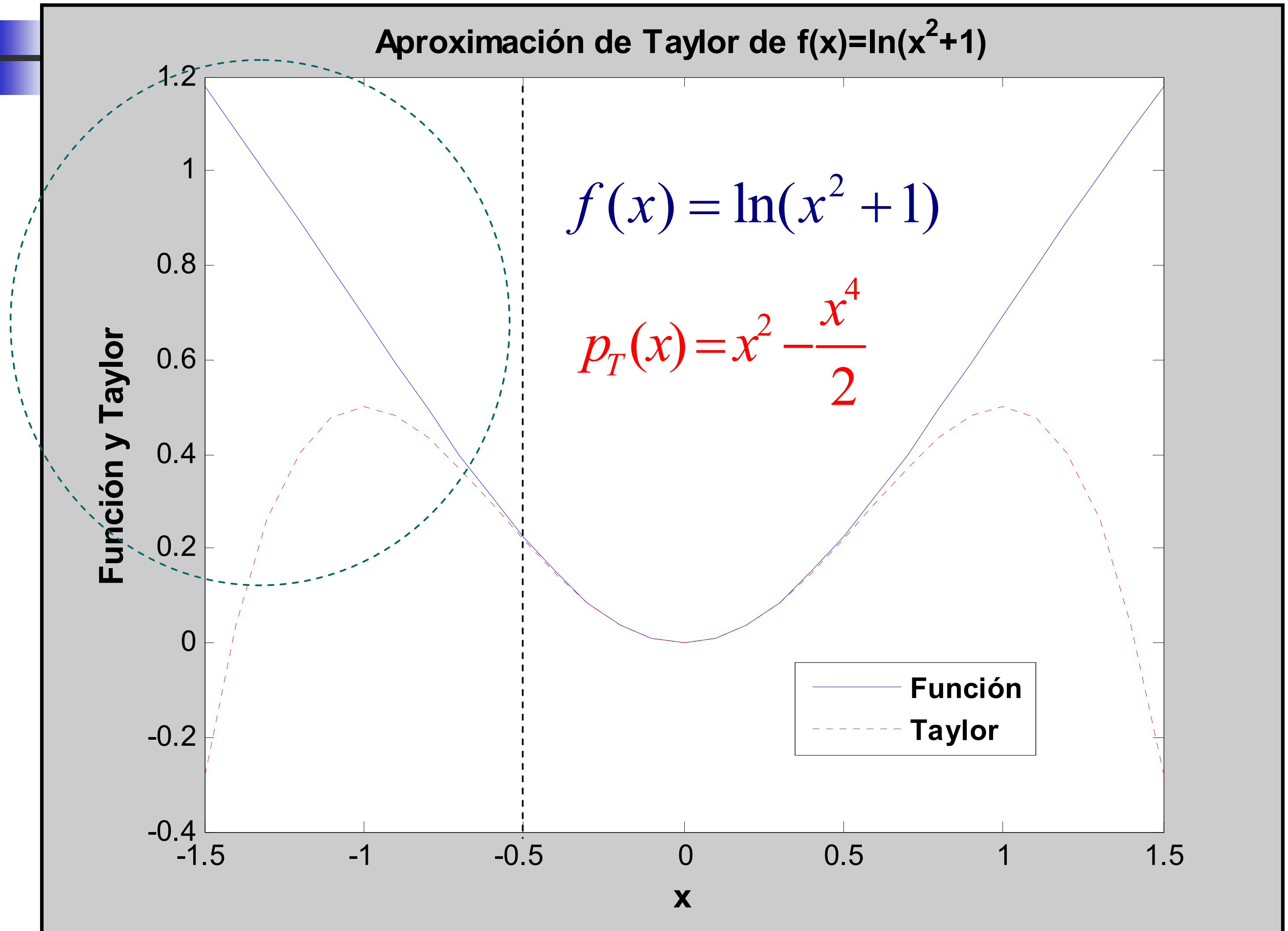
$$f(0.5), p_T(0.5) \text{ y } f(1.0), p_T(1.0)$$

- Cual es el error ?

2) Motivación 1: Polinomio de Taylor



2) Motivación 1: Polinomio de Taylor



2) Motivación 1: Aprox. Polinomial

- Sea $f \in \zeta[a,b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MC:

$$\boxed{\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 \, dx}$$

$$\boxed{\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}}$$

Matriz tipo Hilbert !

- Ecuaciones Normales:

coeficientes

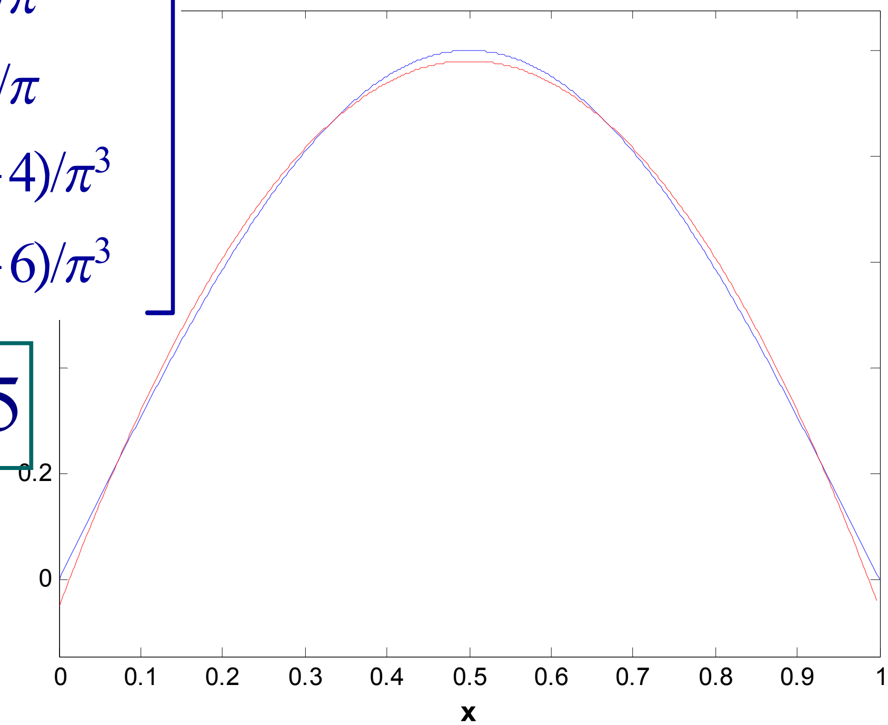
$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$

2) Motivación 2: Aprox. Polinomial

- Sea $f(x) = \sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 en [0,1] según MC:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2-4)/\pi^3 \\ (\pi^2-6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05}$$



2) Motivación 2: Modelación y Edo

- Modelo de Crecimiento Logístico:

La población $p(t)$ de EEUU en el siglo 20 crece aprox. según la edo no-lineal logística:

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \alpha\, p(t) - \beta\, p^2(t)}$$

Donde: α=0.02 y β=0.00004. Desde 1900 se han medido los datos de la tabla siguiente.

Se puede afirmar que el modelo es adecuado ?

Cuál es error entre 1900 1980 ?

2) Motivación 2: Modelación y Edo

Año	Tiempo t_k	p(t) real
1900	0.0	76.1
1910	10.0	92.4
1920	20.0	106.5
1930	30.0	123.1
1940	40.0	132.6
1950	50.0	152.3
1960	60.0	180.7
1970	70.0	204.9
1980	80.0	226.5

2) Motivación 2: Modelación y Edo

$$\frac{dp}{dt} = \alpha\, p(t) - \beta\, p^2(t)$$

$$p(t) = \frac{500}{\left(1 + \frac{4239}{761} e^{-\frac{1}{50}t}\right)}$$ solución exacta

$$p_{k+1} = p_k + h(\alpha\, p_k - \beta\, p_k^{\;2})$$

$$p_k = p(t = t_k)\ \forall k = 0,\ldots,8 = n$$

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} = \frac{(1980 - 1900)}{8} = 10$$

$$t_k = hk = 10k\ \ k = 0,1,\ldots,8$$

2) Motivación 2: Modelación y Edo

Año	Tiempo t_k	p(t) real	p(t) Edo	p(t) Euler	Er 1	Er 2
1900	0.0	76.1	76.1	76.1	0.0	0.0
1910	10.0	92.4	89.9	89.0	2.5	0.9
1920	20.0	106.5	105.6	107.5	0.9	-1.9
1930	30.0	123.1	123.2	123.3	-0.1	-0.1
1940	40.0	132.6	142.7	141.7	-10.1	1.6
1950	50.0	152.3	164.0	152.1	-11.7	11.9
1960	60.0	180.7	186.7	173.5	-6.0	13.2
1970	70.0	204.9	210.6	203.8	-5.7	6.8
1980	80.0	226.5	235.3	229.1	-8.8	6.2

3) Organización de la Sesiones:

- 2 Clases de Cátedra a la semana: (gjho@vtr.net) Martes y Jueves 12:00 hrs.
- 1 Clase Auxiliar: Miércoles 16:15 hrs. Gonzalo Rios y Constanza Maturana
- Clases + Ayudantias + Tareas + Notas + Pautas + Etc.: U-Cursos

4) Evaluación:

La evaluación de la asignatura considera:

- 3 Controles preparados con Tareas
- Examen reemplaza el peor Control

$$\boxed{NC = \left[C_1 + C_2 + C_3 + 2*E - \min(C_1, C_2, C_3, E)\right]/4}$$

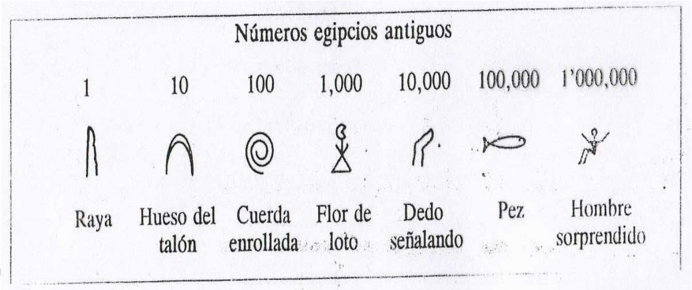
- 2 Tareas + 1 Trabajo + 4 Laboratorios
- Nota Final:

$$\boxed{NF = 0.6*NC + 0.2*NT + 0.2*NL}$$

5) Objetivos de la Asignatura

- Introducción al Cálculo Numérico en Ciencias & Ingeniería (Aprender Conocimientos)
- Desarrollar una Metodología (Modelación) para resolver problemas en C & I
- Utilizar Calculo Numérico + Software como herramienta para resolver problemas en C & I (Aplicaciones Científicas)

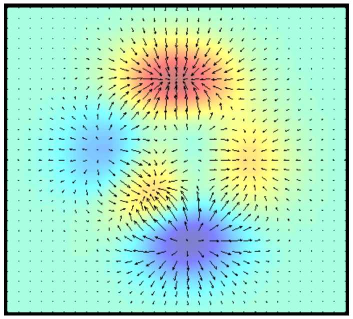
6) Programa de CN:



0) Introducción: Presentación de la Asignatura

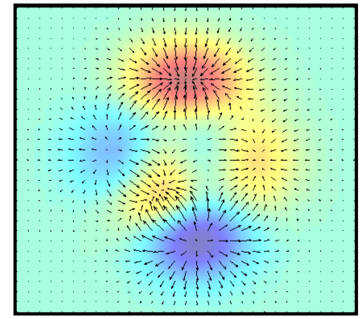
1) Representación Numérica y Errores
   a) Representación Numérica en el Computador
   b) Tipos y Fuentes de error
   c) Propagación de errores
   d) Fórmula general del error
   e) Aritmética en punto flotante

6) Programa de CN:



2) Sistemas de Ecuaciones Lineales
   a) Motivación - Aplicación: Interpolación Polinomial, Mínimos Cuadrados y M. Simplex
   b) Métodos Directos de Eliminación (Gauss y Gauss-Jordan)
   c) Análisis de Error del Método de Gauss
   d) Matriz Inversa y Determinante
   e) Factorización de Matrices

6) Programa de CN:



2) Sistemas de Ecuaciones Lineales

f) Método de Jacobi

g) Método de Gauss-Seidel

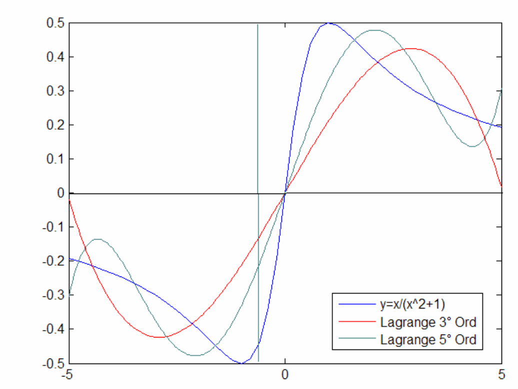
h) Método de Relajación

Métodos Iterativos

i) Análisis de Error de los Métodos Iterativos

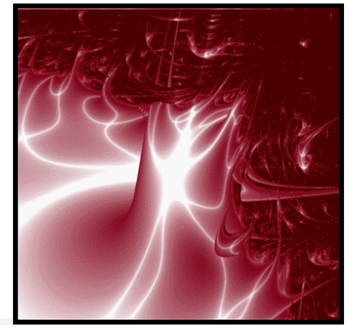
j) Métodos para Vectores y Valores Propios

6) Programa de CN:



3) Interpolación y Aproximación de Funciones
   a) Motivación
   b) Aproximación de Taylor
   c) Interpolación de Lagrange, Newton y Hermite
   d) Interpolación por Spline Cúbicos
   e) Aproximación por Mínimos Cuadrados
   f) Aproximación Racional
   g) Aproximación Trigonométrica

6) Programa de CN:

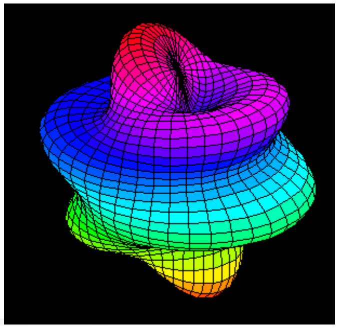


4) Sistemas de Ecuaciones No-Lineales
   a) Motivación: Optimización
   b) Métodos para Ecuaciones de Una Variable:
      i) Bisección del Intervalo
      ii) Métodos de Secantes y Tangentes
      iii) Método de Punto Fijo
      iv) Método de Newton - Raphson
      v) Raíces o Ceros de Polinomios

6) Programa de CN:

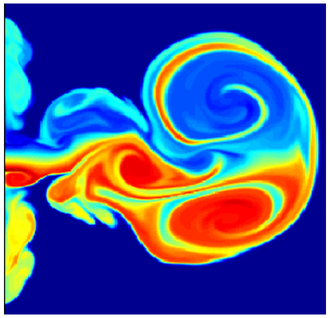
4) Sistemas de Ecuaciones No-Lineales
   c) Métodos para Sistemas de Ecs. No-Lineales:
      i) Método de Punto Fijo
      ii) Método de Newton – Kantorovich
      iii) Métodos de Optimización:
         - Descenso más Rápido
         - Direcciones Congujadas
         - Cuasi – Newton

6) Programa de CN:



5) Diferenciación e Integración de Funciones
   a) Motivación
   b) Diferenciación de Primer y Segundo Orden
   c) Métodos de Cuadratura de Newton-Cotes
   d) Integración Adaptiva
   e) Métodos de Cuadratura de Gauss
   f) Integrales Impropias
   g) Integrales Múltiples

6) Programa de CN:



6) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
   a) Motivación
   b) Métodos de Euler y Taylor
   c) Métodos de Runge - Kutta
   d) Métodos Multi-paso
   e) Métodos de Extrapolación
   f) Edo. de Orden Superior y Sistemas de Edo

7) Bibliografía CN

1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
2) C.F. Gerald & P.O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Pearson, 2004.
3) J.H. Mathews & K.D. Fink, Métodos Numéricos con Matlab, Prentice-Hall, 2003.
4) A. Gilat, MATLAB: An Introduction with Applications, John Wiley & Sons, 2004.