

Pauta Control N°1 MA34A-3 Estadística

Profesor Alexis Peña

Auxiliares Diego Díaz, Natalia Rodriguez

1. (a) (1.5ptos.)

$$X \sim U(\theta, \theta + 1)$$

Luego

$$f(x/\theta) = 1$$

Veamos la esperanza y la varianza de \bar{x} :

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i)$$

Falta $E(x)$, para ello se puede calcular por definición:

$$E(x) = \int_{\theta}^{\theta+1} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\theta}^{\theta+1} = \frac{\theta^2 + 2\theta + 1 - \theta^2}{2} = \theta + \frac{1}{2}$$

Luego,

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}nE(x) = \frac{1}{n}n\left(\theta + \frac{1}{2}\right) = \theta + \frac{1}{2}$$

Luego el Sesgo = $\frac{1}{2}$, con lo que el estimador NO es asintóticamente insesgado, pues

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow E(\bar{x}) = \frac{1}{2}$$

(b) (1.5 ptos.) El estimador puede ser

$$\hat{\theta} = \bar{x} - \frac{1}{2}$$

Pues

$$E(\hat{\theta}) = E(\bar{x}) - \frac{1}{2} = \hat{\theta}$$

Con lo que Sesgo = 0 y el estimador es insesgado.

(c) (1.5 ptos.) Calculemos la varianza para \bar{x} y $\hat{\theta}$

$$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

Dado que $x_i \perp x_j$ si $i \neq j$, entonces

$$\text{Var}(\hat{x}) = \frac{1}{n^2} \sum \text{Var}(x_i)$$

Veamos cuanto vale $\text{Var}(x_i)$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

Calculemos la $E(x^2)$

$$E(x^2) = \int_{\theta}^{\theta+1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{\theta}^{\theta+1} = \frac{3\theta^3 + 3\theta^2 + 3\theta + 1 - \theta^3}{3} = \frac{3\theta^2 + 3\theta + 1}{3}$$

Con lo que

$$\text{Var}(x) = \theta^2 + \theta + \frac{1}{3} - \theta^2 - \theta - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{12n}$$

Luego

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Var}(\bar{x}) \rightarrow 0$$

Veamos $\text{Var}(\hat{\theta})$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}\left(\bar{x} - \frac{1}{2}\right) = \text{Var}(\bar{x})$$

Luego las varianzas son iguales

(d) (1.5 pts.) El ECM viene dado por

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}(\hat{\theta})$$

Pero vimos que el sesgo era cero, entonces

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{12n}$$

Veamos cuanto vale el sesgo para \bar{x}

$$\text{Sesgo}(\bar{x}) = \frac{1}{12n} + \frac{1}{4}$$

Luego $\text{ECM}(\bar{x}) > \text{ECM}(\hat{\theta}) \Rightarrow \hat{\theta}$ estima mejor pues tiene menos error asociado.

2 (a) (2 ptos.) Dado que

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Pues:

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}nE(x) = \mu$$

y

$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}n \sum_{i=1}^n Var(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Luego:

$$P(|\bar{x} - \mu| \leq 0.7) = 0.95 \Rightarrow P(-0.7 \leq \bar{x} - \mu \leq 0.7)$$

$$\Rightarrow P(-0.7\sqrt{n}\sigma^2 \leq \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma^2} \leq \frac{0.7\sqrt{n}}{\sigma^2})$$

$$\Rightarrow P(|z| \leq \frac{0.7\sqrt{n}}{\sigma^2}) = 0.95$$

Esto pasa si y sólo si

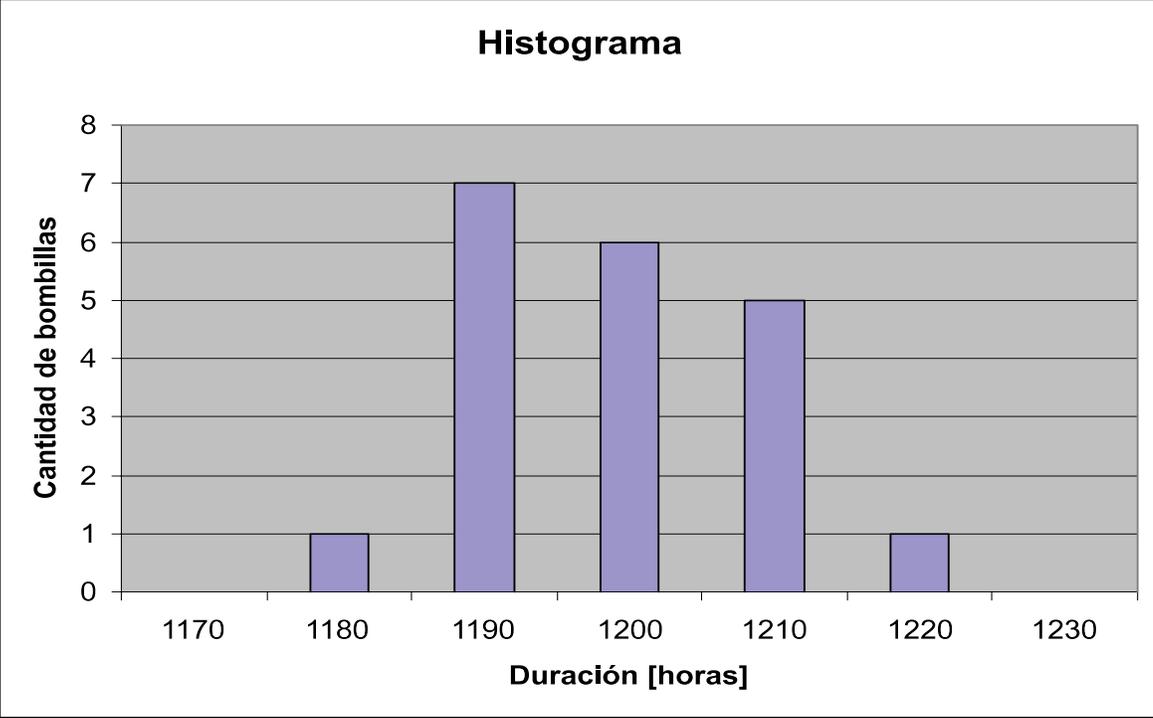
$$\frac{0.7\sqrt{n}}{\sigma^2} = 1.96$$

Luego

$$n = 748$$

(b) (2 ptos.) Haciendo el Histograma, se tiene (ver gráfico adjunto)

(c) (2 ptos.) Ver la tabla adjunta para ubicar los cuartiles



1	1178	
2	1187	
3	1188	
4	1188	
5	1188	1/4
6	1189	
7	1189	
8	1190	
9	1191	
10	1195	1/2
11	1196	
12	1197	
13	1200	
14	1200	
15	1201	3/4
16	1202	
17	1203	
18	1210	
19	1210	
20	1215	