26/03/07 CONTROL 1 MA34B
3horas R. Assar, N. Lacourly, A. Peña

Problema 1

El voltaje X de un determinado circuito se distribuye uniformemente en un intervalo $[\theta, \theta + 1]$, donde θ se desconoce. Se obtiene una muestra aleatoria simple del voltaje $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

(a) Muestre que $\bar{x}$ es un estimador sesgado de θ. Calcule su sesgo. ¿Es asintóticamente insesgado?.

(b) Obtenga a partir de $\bar{x}$ un estimador $\hat{\theta}$ insesgado de θ. Compare las varianzas de $\bar{x}$ y $\hat{\theta}$.

(c) Deduzca los Errores Cuadráticos Medio de $\bar{x}$ y $\hat{\theta}$. Compare y concluya.

Problema 2

La duración de una bombilla sigue una distribución $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ donde $\mu = 1200[hrs]$ y $\sigma^2 = 100[hrs^2]$.

(a) Calcule el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la media empírica $\bar{x}$ no difiera del verdadero valor μ en más de $0{,}7[hrs]$ con una probabilidad de $95\,\%$. (Hint: Use la distribución de $\bar{x}$ y $I\!P(|\bar{x} - \mu| \leq 0{,}7) = 0{,}95$ y $I\!P(|z| \leq 1{,}96) = 0{,}95$ si $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

(b) Se tomo una muestra de 20 bombillas cuyas duraciones son:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1188	1178	1210	1195	1203	1202	1200	1190	1191	1196
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1188	1189	1215	1201	1188	1200	1189	1187	1197	1210

Construya y dé un gráfico de la función de distribución empírica de los valores muestrales.

(c) Para estudiar la dispersión de la distribución teórica, se define los siguientes estadísticos (cuartiles):
• Q_1 el valor de X tal que $I\!P(X \leq Q_1) = 1/4$
• Q_2 el valor de X tal que $I\!P(X \leq Q_2) = 1/2$
• Q_3 el valor de X tal que $I\!P(X \leq Q_3) = 3/4$

Encuentre estos valores en la muestra. Interprete en particular a Q_2.

Problema 3

En el estudio de los defectos de una impresora a color, para cada de hoja impresa, se observa tres alternativas:

- opción 0 si la hoja no tiene defecto
- opción 1 si la hoja salió con algún defecto
- opción 2 si la hoja no salió.

Llamamos $p_i = \mathbb{P}$(que una hoja tome la opción i) $(i = 0, 1, 2)$.

Se observa una muestra aleatoria simple de n hojas a imprimir. Se llama y_i al número de veces que salió la opción i en la muestra.

La función de probabilidad conjunta de (y_0, y_1, y_2) es:

$$P(Y = (y_0, y_1, y_2)|n; p_0, p_1, p_2) = \frac{n!}{y_0!y_1!y_2!} p_0^{y_0} p_1^{y_1} p_2^{y_2} \quad ; \sum_i y_i = n \quad ; \sum_i p_i = 1$$

(a) Justifique la función de probabilidad utilizando la combinatoria.

(b) Una muestra de 190 hojas dio los siguientes resultados:

opción	0	1	2
y_i observados	10	68	112

Obtenga el estimador de Máxima Verosimilitud de los parámetros p_0, p_1 y p_2. (OJO: Observe que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$).

(c) Supongamos ahora que los defectos aumentan con el tiempo de uso de la impresora. Esto se traduce en una variable Z que sigue una distribución exponencial ($f(z) = \lambda e^{-\lambda z}$, $z > 0$) tal que

$$p_0 = P(Z \leq 1), \quad p_1 = P(1 < Z < 2), \quad p_2 = P(Z \geq 2)$$

Introduciendo estos nuevos elementos en la función de probabilidad estime el parámetro λ. Determine la estimación de λ en base a los datos observados. Interprete.