26/03/07 PAUTA CONTROL 1 MA34B
3horas R. Assar, N. Lacourly, A. Peña

Problema 1

(a) La función de densidad del voltaje es: 1 si $x \in [\theta, \theta+1]$.
Luego $E(\bar{x}) = \int_{\theta}^{\theta+1} x dx = \frac{1}{2}[(\theta+1))^2 - \theta^2] = \theta + \frac{1}{2}$.
Se concluye $\bar{x}$ tiene un sesgo positivo igual a $1/2$. No es asintóticamente insesgado.

(b) El estimador $\hat{\theta} = \bar{x} - 1/2$ es insesgado y $Var(\hat{\theta}) = Var(\bar{x}) = \frac{Var(x)}{n} = \frac{1}{12n}$.

(c) Luego $ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) = Var(\bar{x}) = \frac{1}{12n}$ y $ECM(\bar{x}) = Var(\bar{x}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{12n} + \frac{1}{4}$.
Se concluye que el estimador insesgado es mejor para el criterio ECM.

Problema 2

(a) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Luego, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ y $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
$\bar{x}$ no difiera del verdadero valor μ en más de $0{,}7h$ con una probabilidad de $95\,\%$ significa que

$$\mathbb{P}(|\bar{x} - \mu| \leq 0{,}7) = 0{,}95$$

o sea $\mathbb{P}(|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}| \leq \frac{\sqrt{n}0{,}7}{\sigma}) = 0{,}95$ Siendo que $\mathbb{P}(|z| \leq 1{,}96) = 0{,}95$ si $z \sim \mathcal{N}(0,1)$, se deduce que $\sqrt{n} = \frac{1{,}96\sigma}{0{,}7}$ o sea $n = \frac{(1{,}96\sigma)^2}{0{,}7^2} = 784$.

(b) La función de distribución empírica se define como:

$$F_n(x) = \frac{card(x_i \leq x)}{n}$$

Se obtiene el gráfico:

(c) Siendo el tamaño de la muestra $n = 20$, n es un múltiple de 4. Los valores de los cuartiles empíricos en la muestra son entre los estadísticos de orden 5, 10 y 15, respectivamente. O sea:
• $Q_1 = 1188$
• $Q_2 = 1195$
• $Q_3 = 1201$

Q_2 es la mediana de la distribución: tiene la misma cantidad de observación por debajo y encima de este valor.

Problema 3

(a) El termino $\frac{y_0!y_1!y_2}{n!}$ corresponde al número de muestras posibles con y_0, y_1 y y_2 tipos de hojas respectivamente.

(b)

$$ln(L) = ln(\frac{n!}{y_0!y_1!y_2}) + [y_0 ln(p_0) + y_1 ln(p_1) + y_2 ln(p_2)]$$

Usando el multiplicador de Lagrange α,

$$\frac{\partial ln(P)}{\partial p_i} - \alpha(\sum p_i - 1) = \frac{y_i}{p_i} - \alpha$$

Igualando a 0 y observando que $\sum p_i = 1$ se obtiene que $\alpha = \sum y_i = n$. Se concluye que:

$$\hat{p_0} = \frac{y_0}{n} \quad \hat{p_1} = \frac{y_1}{n} \quad \hat{p_2} = \frac{y_2}{n}$$

(c)

$$\begin{aligned}
p_0 &= P(Z < 1) = 1 - e^{-\lambda} \\
p_1 &= P(Z < 2) - P(Z < 1) = 1 - e^{-2\lambda} - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} \\
p_2 &= P(Z > 2) = e^{-2\lambda}
\end{aligned}$$

Luego la función de verosimilitud es:

$$lnL(\lambda) = ln(\frac{n!}{y_0!y_1!y_2}) + y_0 ln(1 - e^{-\lambda}) + y_1 ln(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}) + y_2 ln(e^{-2\lambda})$$

Luego

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{y_0 e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} + y_1 \frac{(-e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda})}{e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}} - 2y_2$$

Igualando a cero, se tiene

$$\hat{\lambda} = \log\left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2}{y_1 + 2y_2}\right)$$

Utilizando los cálculos anteriores, se tiene que $\hat{\lambda} = 0{,}237$.