

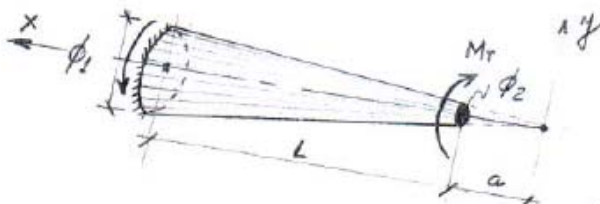
Semestre Primavera 2006

(21 de Junio)

Auxiliar N°7

### PROBLEMAS

1.- Un eje cónico macizo de acero ( $G = 8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ) está rigidamente empotrado por un extremo y sometido a un momento de torsión  $M_T$  en el otro. Se pide calcular el esfuerzo de corte máximo y la rotación del extremo libre. Son datos:  $\phi_1 = 15 \text{ cm}$  ;  $L = 50 \text{ cm}$   
 $\phi_2 = 5 \text{ cm}$  ;  $M_T = 27000 \text{ kgcm}$ .



La reacción en el apoyo es  $M_T$ , con el sentido que se indica. A lo largo del eje  $x$ ,  $M_T$  se mantiene cte. (Esto se determina por el método de las secciones).

Se tiene:  $\tau_{\max} = \frac{16}{\pi} \frac{M_T}{\phi^3}$  ; tomando la sección de  $\phi_{\min}$ .

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi} \frac{27000}{5^3} = 1100 \text{ kg/cm}^2$$

Calculemos ahora el diámetro del cono a una distancia  $x$ . ( $\phi_x$ )  
Sea "a" la distancia de la sección ② al vértice del cono; se tiene:

$$\frac{a}{\phi_2} = \frac{a+L}{\phi_1} \Rightarrow a = 25 \text{ cm} ; \text{ eligiendo el origen de coordenadas en el vértice del cono, se cumple:}$$

$$\frac{\phi_x/2}{x} = \frac{\phi_1/2}{L+a} \Rightarrow \phi_x = 0.2 x.$$

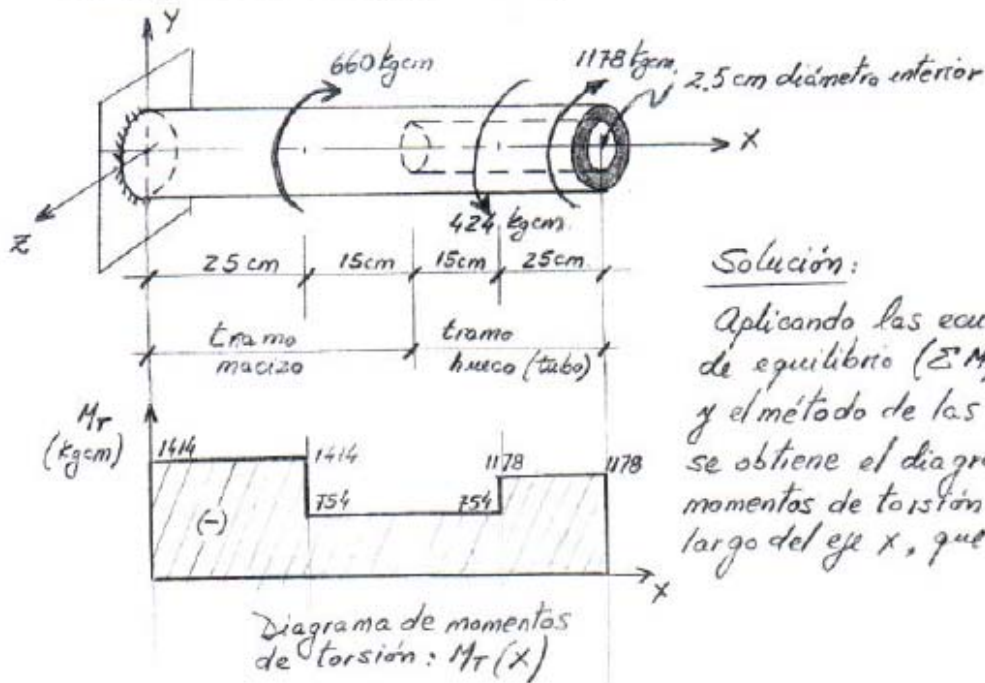
El momento de inercia polar de una sección a la cota  $x$  ( $J_x$ ), vale:

$$J_x = \frac{\pi}{32} \phi_x^4 = \frac{\pi}{32} (0,2 x)^4 = 1,5708 \cdot 10^{-4} x^4$$

El giro  $\theta = \int_{25}^{75} \frac{M_T}{G J_x} dx = \int_{25}^{75} \frac{27000}{8,4 \cdot 10^5 \cdot 1,5708 \cdot 10^{-4} x^4} dx$

$$\theta = \int_{25}^{75} \frac{204,6278}{x^4} dx = 4,2037 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = \underline{0,2409^\circ}$$

2.- Determine el esfuerzo cortante máximo en la barra sometida a los momentos de torsión indicados. Calcule además el ángulo que gira la sección libre. Son datos:  $G = 0,84 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , diámetro de la barra:  $\phi = 5 \text{ cm}$ .



Solución:

Aplicando las ecuaciones de equilibrio ( $\sum M_x = 0$ ) y el método de las secciones, se obtiene el diagrama de momentos de torsión a lo largo del eje  $x$ , que se indica.

Por lo tanto, el tramo de eje macizo está sometido a un momento de torsión máximo de :  $M_{T1} = 1414 \text{ kgcm}$ , mientras que el tramo de eje hueco soporta un momento torsor de :  $M_{T2} = 1178 \text{ kgcm}$ .

Luego, el esfuerzo máximo en el tramo macizo vale:

$$\tau_{\text{máx}1} = \frac{16 M_{T1}}{\pi \phi_1^3} = \frac{16 \cdot 1414}{\pi \cdot 5^3} = 57.6 \text{ kg/cm}^2$$

En el tramo hueco :

$$\tau_{\text{máx}2} = \frac{2 \times 1178 \times 2.5}{\pi (2.5^4 - 1.25^4)} = 51.2 \text{ kg/cm}^2$$

Luego  $\tau_{\text{máx}}$  se produce en el tramo macizo, y vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \underline{57.6 \text{ kg/cm}^2}$$

El momento de inercia polar del tramo macizo vale:

$$J_1 = \frac{\pi \cdot 5^4}{32} = 61.36 \text{ cm}^4$$

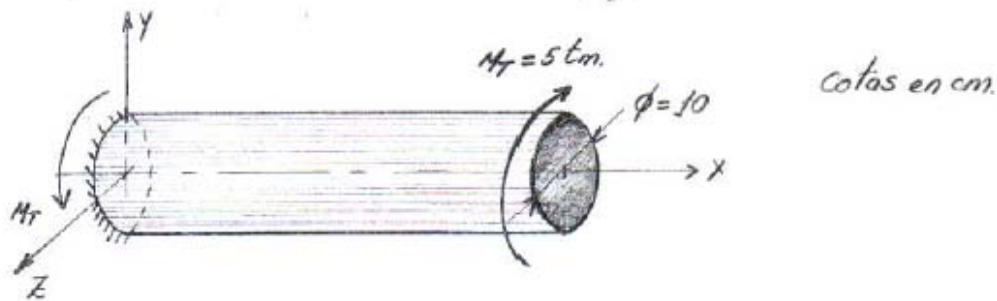
En el tramo hueco :  $J_2 = \frac{\pi}{2} (2.5^4 - 1.25^4) = 57.52 \text{ cm}^4$

El giro de la sección libre vale:

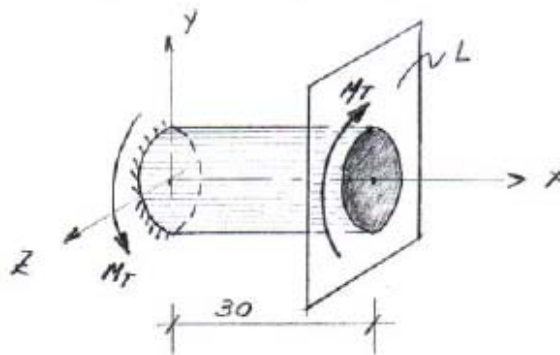
$$\begin{aligned} \theta = & \int_0^{25} \frac{1414}{61.36 \times 0.84 \times 10^6} dx + \int_{25}^{40} \frac{754}{61.36 \cdot 0.84 \cdot 10^6} dx + \\ & + \int_{40}^{55} \frac{754}{57.52 \cdot 0.84 \cdot 10^6} dx + \int_{55}^{80} \frac{1178}{57.52 \cdot 0.84 \cdot 10^6} dx \end{aligned}$$

$$\theta = 1.749 \times 10^{-3} \text{ rad} = \underline{0.10^\circ}$$

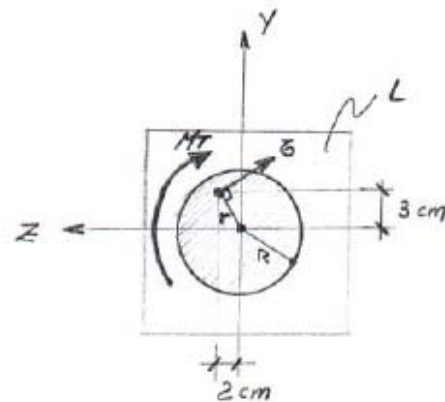
3.- Calcule la matriz de esfuerzos del punto de coordenadas  $(30, 3, 2)$  del cilindro de la figura.



Haciendo un corte imaginario al cilindro por un plano  $L$  paralelo al plano  $yz$  en  $x = 30 \text{ cm}$  y aislando el trozo de cilindro a la izquierda del plano, se tiene la situación de equilibrio que se indica.



Los esfuerzos contenidos en el plano  $L$  tendrán como 1<sup>er</sup> subíndice la letra  $z$ . (Plano  $\perp$  al eje  $z$ )

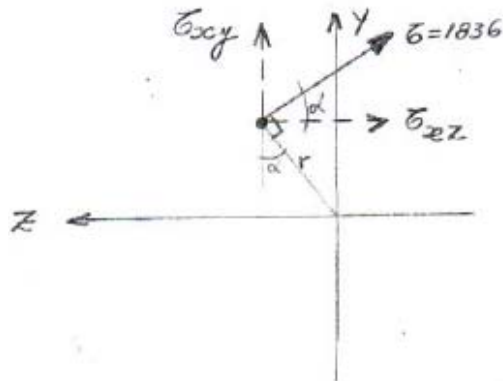


En el pto de coordenadas  $(30, 3, 2)$  actúa un esfuerzo contenido en el plano  $L$  (esfuerzo de corte  $\tau$ ), con la dirección y sentido indicados. Se tiene:

$$\frac{\tau_{máx}}{R} = \frac{\tau}{r} \Rightarrow \tau = \tau_{máx} \frac{r}{R}$$

$$\sigma_{m\acute{o}d} = \frac{16}{\pi} \frac{M_T}{\phi^3} = \frac{16}{\pi} \frac{500000}{10^3} = 2546 \text{ kg/cm}^2$$

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,606 \text{ cm} ; \quad \sigma = \frac{2546}{5} 3,606 = 1836 \text{ kg/cm}^2$$



$$|\sigma_{xy}| = \sigma \sin \alpha$$

$$|\sigma_{xz}| = \sigma \cos \alpha$$

$$\alpha = \arctg \frac{2}{3} = 33,69^\circ$$

$$\sigma_{xy} = +1018 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{xz} = -1528 \text{ kg/cm}^2$$

Como la matriz de esfuerzos es simétrica

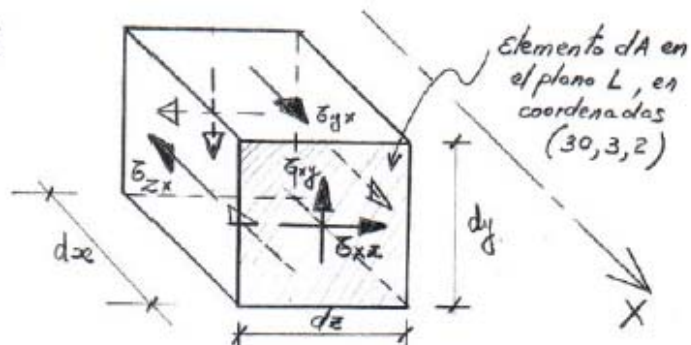
$(\sigma_{ij} = \sigma_{ji})$ , se tiene:

$$\sigma_{yx} = +1018 ; \quad \sigma_{zx} = -1528$$

Los otros términos de la matriz son nulos y la matriz de esfuerzos es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +1018 & -1528 \\ +1018 & 0 & 0 \\ -1528 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\text{kg/cm}^2)$$

El esquema muestra el estado de esfuerzos en el punto considerado.



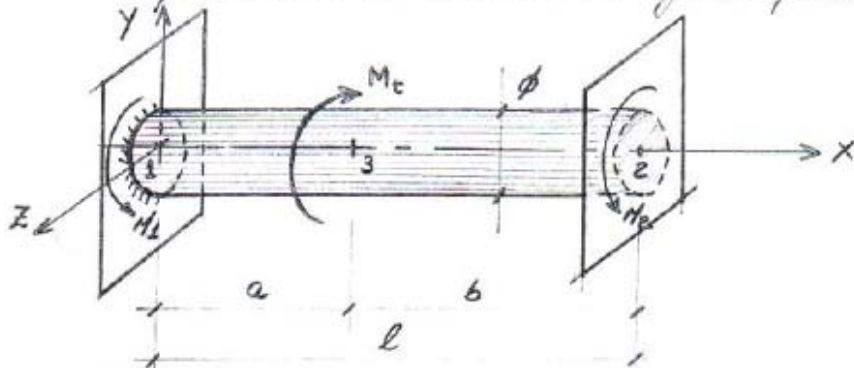


### 8.3- Estructuras hiperestáticas en torsión:

Este tipo de estructuras (como todas las hiperestáticas), se calculan aplicando las condiciones de equilibrio estático y de compatibilidad geométrica.

El método se explicará con un ejemplo:

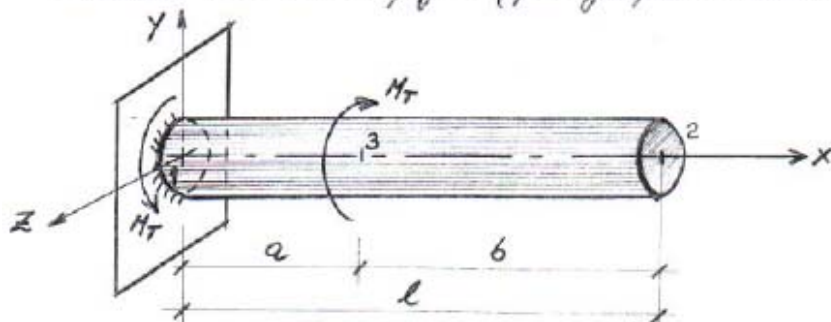
Se pide calcular las reacciones en el eje biempotrado del esquema.



Las secciones 1 y 2 están impedidas de girar (empotradas), en la sección 3 se aplica un momento de torsión  $M_t$ . Las reacciones son los momentos torsores  $M_1$  y  $M_2$ .

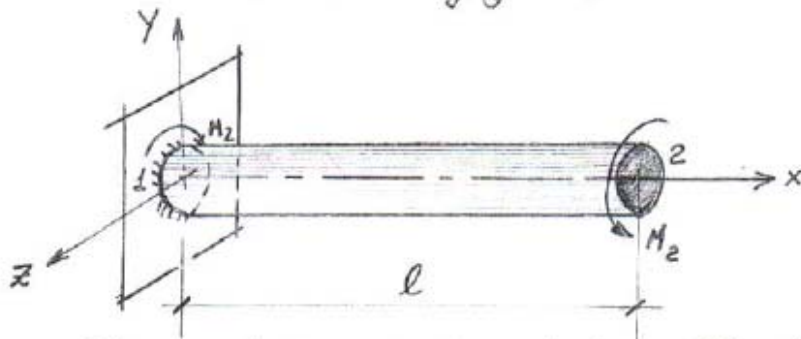
La condición de equilibrio estático exige:  $\sum M_x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \textcircled{1} + M_1 + M_2 - M_t = 0$ . Tenemos una ecuación y dos incógnitas ( $M_1$  y  $M_2$ ), saltamos uno de los apoyos (por ejemplo la sección 2).



Para esta situación calculamos el giro de la sección 2 ( $\theta_2$ ). El giro de la sección 2 es igual al giro de la sección 3. ( $\theta_3$ ) ya que entre 2 y 3 el momento de torsión es cero.

se tiene:  $\theta_2 = \theta_3 = - \frac{M_T \times a}{JG}$  ;



El momento  $M_2$ , aplicado en el extremo libre debe anular al momento calculado anteriormente.

se tiene  $\theta_2' = + \frac{M_2 \times l}{JG}$  , luego la condición de compatibilidad geométrica es:

$$\theta_2 + \theta_2' = 0 = - \frac{M_T \times a}{JG} + \frac{M_2 \times l}{JG}$$

luego,  $\boxed{M_2 = \frac{M_T \times a}{l}}$  ;  $\boxed{M_1 = \frac{M_T \times b}{l}}$  (de la ecuación ①)