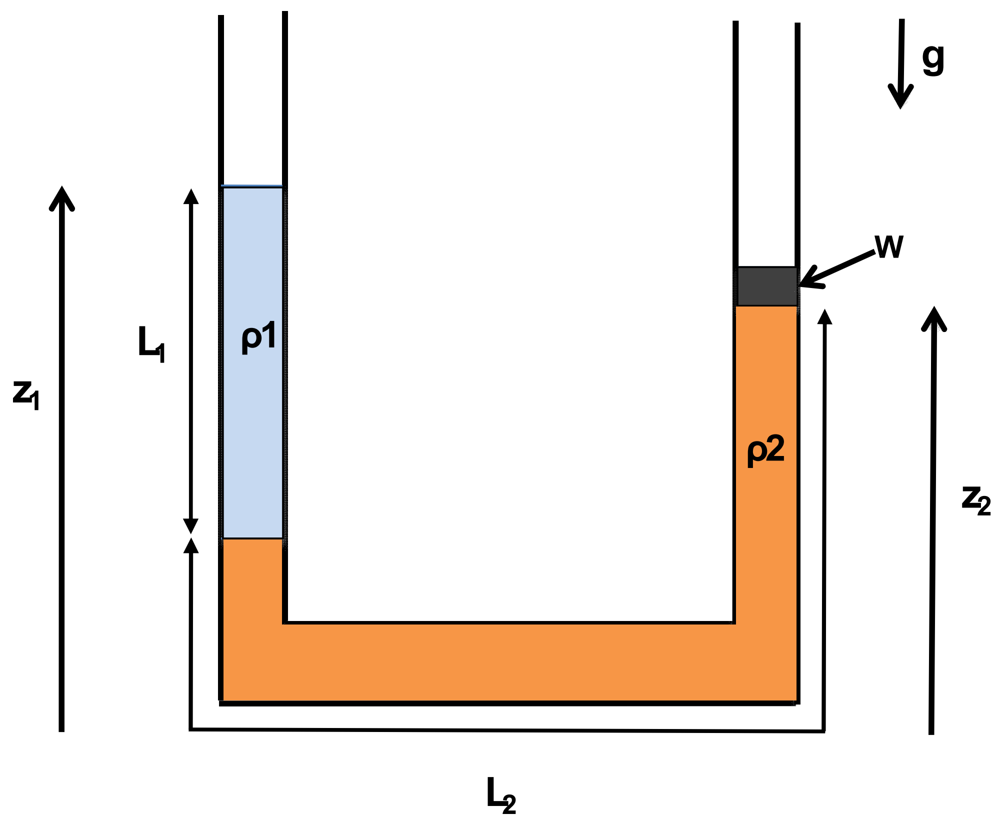
Sem. Primavera 2007
Auxs.: Cristián Godoy
Sofía Mordojovich

CI41A – Auxiliar 2
Martes 28 de Agosto 2007

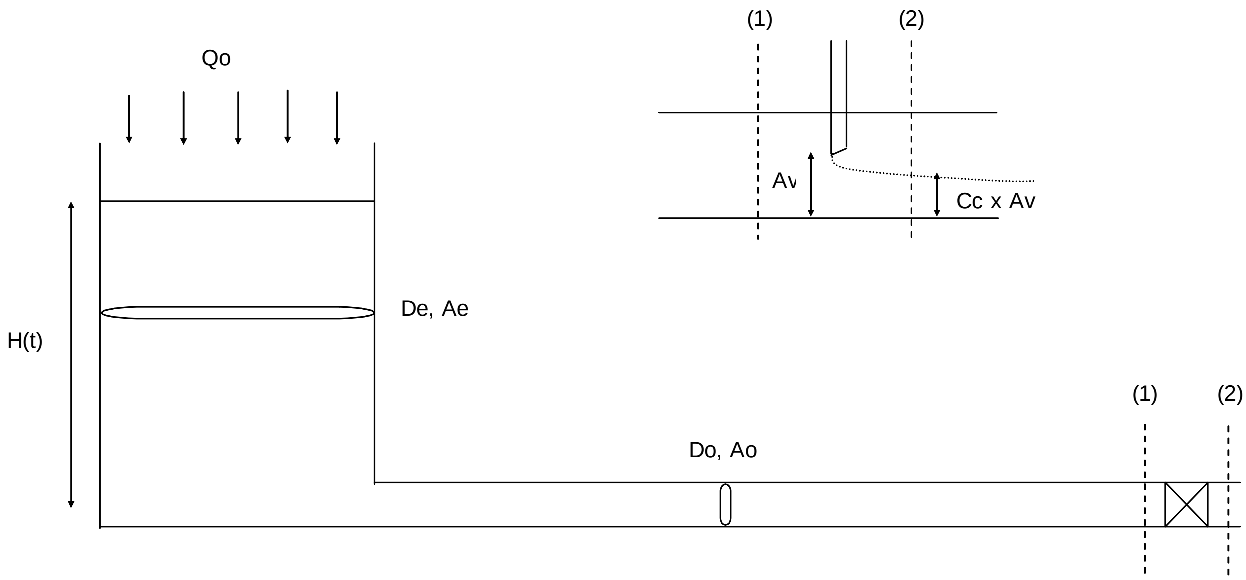
P1) Un tubo en U, de diámetro D, contiene dos líquidos como se muestra en la figura. En la rama derecha se deposita un disco de peso W, cuyo roce con las paredes es despreciable. Considerando que la interfaz de los líquidos se mantiene siempre en la rama izquierda, que el movimiento se realiza en régimen laminar y que en t=0 la superficie libre del líquido de densidad ρ1 se desplaza de su posición de equilibrio una distancia ho se pide:

a) Determinar la ecuación diferencial que rige el movimiento de la superficie libre.

b) Determinar la expresión que describe a la superficie libre en función del tiempo. Esquematizar gráficamente el resultado.



P2) Se tiene un estanque de área Ae que descarga a la atmósfera, mediante una tubería de área transversal Ao. La descarga del estanque se regula mediante una válvula ubicada en el extremo aguas abajo de la tubería. Adicionalmente, existe una recarga constante de valor Qo sobre el estanque.



Despreciando pérdidas singulares y friccionales del sistema:

Considerando que la altura del estanque varía con la expresión:

$$H(t) = Ho + \beta \cdot sen(\omega \cdot t) \qquad \beta, \omega \;\; ctes > 0$$

Encuentre una expresión para la apertura de la válvula en función del tiempo $Av(t)$.

Pauta P1 Primavera 2006

En el líquido 1: $$\frac{L_1}{g}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t}+B_1-B_{2(1)}+\Lambda_{21}=0 \qquad (1)$$

En el líquido 2: $$\frac{L_2}{g}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial t}+B_{2(2)}-B_3+\Lambda_{32}=0 \qquad (2)$$

Notar que $B_{2(1)} \neq B_{2(2)}$

Y $u_1 = u_2 = u$

$$\Lambda=\frac{f\cdot L}{D}\cdot\frac{u^2}{2g}$$

Régimen laminar: $f=\frac{64}{\Re}=\frac{64\upsilon}{u\cdot D}$ y $\alpha = 2$

$$\Lambda_{21}=\frac{64\cdot\upsilon_1\cdot L_1}{u\cdot D^2}\cdot\frac{u^2}{2g}=\frac{32\cdot\upsilon_1\cdot L_1\cdot u}{D^2\cdot g}$$

$$\Lambda_{32}=\frac{64\cdot\upsilon_2\cdot L_2}{u\cdot D^2}\cdot\frac{u^2}{2g}=\frac{32\cdot\upsilon_2\cdot L_2\cdot u}{D^2\cdot g}$$

$$B_1=\alpha\frac{u^2}{2g}+0+z_1$$

$$B_{2(1)}=\alpha\frac{u^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma_1}+(z_1-L_1)$$

$$B_{2(2)}=\alpha\frac{u^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma_2}+(z_1-L_1)$$

$$B_3=\alpha\frac{u^2}{2g}+\frac{p_3}{\gamma_2}+z_2$$

Reemplazando en (1), y multiplicando por γ1:

$$\frac{\gamma_1 \cdot L_1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{\gamma_1 \cdot \alpha \frac{u^2}{2g}} + \cancel{\gamma_1 \cdot z_1} - \gamma_1 \cdot \cancel{\alpha \frac{u^2}{2g}} - p_2 - \gamma_1 \cdot (\cancel{z_1} - L_1) + \frac{32 \cdot \upsilon_1 \cdot \gamma_1 \cdot L_1 \cdot u}{D^2 \cdot g} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\gamma_1 \cdot L_1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - p_2 + \gamma_1 \cdot L_1 + \frac{32 \cdot \upsilon_1 \cdot \gamma_1 \cdot L_1 \cdot u}{D^2 \cdot g} = 0 \qquad (3)$$

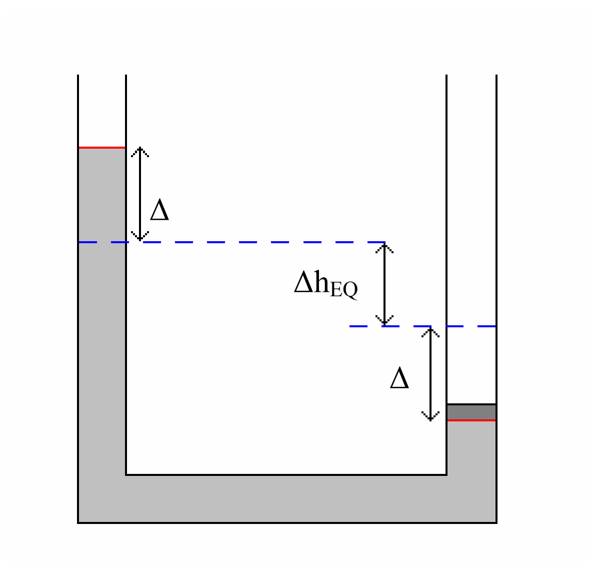
Reemplazando en (2) y multiplicando por γ_2:

$$\gamma_2 \cdot \frac{L_2}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_2 \cdot \cancel{\alpha \frac{u^2}{2g}} + p_2 + \gamma_2 \cdot (z_1 - L_1) - \gamma_2 \cdot \cancel{\alpha \frac{u^2}{2g}} - p_3 - \gamma_2 \cdot z_2 + \frac{32 \cdot \upsilon_2 \cdot \gamma_2 \cdot L_2 \cdot u}{D^2 \cdot g} = 0$$

$$\gamma_2 \cdot \frac{L_2}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + p_2 + \gamma_2 \cdot z_1 - \gamma_2 \cdot L_1 - p_3 - \gamma_2 \cdot z_2 + \frac{32 \cdot \upsilon_2 \cdot \gamma_2 \cdot L_2 \cdot u}{D^2 \cdot g} = 0 \qquad (4)$$

Sumando (3) y (4):

$$\frac{1}{g} \cdot (\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2) \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_2 (z_1 - z_2) + L_1 (\gamma_1 - \gamma_2) - p_3 + \frac{32}{g D^2} (\gamma_1 \upsilon_1 L_1 + \gamma_2 \upsilon_2 L_2) \cdot u = 0$$



$$z_1 - z_2 = 2\Delta + \Delta h_{EQ}$$

$$u = \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{g} \cdot (\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + \gamma_2 (2\Delta + \Delta h_{EQ}) + L_1 (\gamma_1 - \gamma_2) - p_3 + \underbrace{\frac{32}{g D^2} (\gamma_1 \upsilon_1 L_1 + \gamma_2 \upsilon_2 L_2)}_{B} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0$$

En equilibrio:

$$\Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = 0$$

$$\gamma_2 \cdot \Delta h_{EQ} + L_1(\gamma_1 - \gamma_2) - p_3^{(EQ)} = 0$$

$$\Delta h_{EQ} = \frac{p_3^{(EQ)}}{\gamma_2} - \frac{L_1}{\gamma_2}(\gamma_1 - \gamma_2)$$

Entonces:

$$\frac{1}{g} \cdot (\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2)\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + \gamma_2 \cdot 2\Delta + p_3^{(EQ)} \cancel{- L_1(\gamma_1 - \gamma_2)} \cancel{+ L_1(\gamma_1 - \gamma_2)} - p_3 + B \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0$$

Ecuación de movimiento en el disco

$$\sum F = m \cdot \vec{a}$$

$$W - p_3 \cdot A = \frac{W}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$p_3 = \frac{W}{A} - \frac{W}{A \cdot g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$ por lo tanto, en el equilibrio : $$p_3^{(EQ)} = \frac{W}{A}$$

$$\underbrace{\frac{1}{g} \cdot \left(\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2 + \frac{W}{A}\right)}_{C_1}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + \underbrace{\gamma_2 \cdot 2}_{C_3}\Delta + \cancel{\frac{W}{A}} - \cancel{\frac{W}{A}} + B \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0$$

$$C_1 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial \Delta}{\partial t} + C_3 \Delta = 0$$

$$C_1 X^2 + C_2 X + C_3 = 0$$

$$X = \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2^{\,2} - 4C_1 C_3}}{2C_1}$$

$$\Delta(t) = \alpha \cdot \exp\left(\frac{-C_2 + \sqrt{C_2^{\,2} - 4C_1 C_3}}{2C_1} \cdot t\right) + \beta \cdot \exp\left(\frac{-C_2 - \sqrt{C_2^{\,2} - 4C_1 C_3}}{2C_1} \cdot t\right)$$

Si la fricción domina sobre la inercia: movimiento sobre-amortiguado ($C_2^{\,2} \geq 4C_1 C_3$)

Si la inercia domina sobre la fricción: movimiento armónico amortiguado ($C_2^{\,2} \leq 4C_1 C_3$)

Pauta P2 Primavera 2006

a) En el estanque: $\frac{\partial V}{\partial t} = Q_{ENTRA} - Q_{SALE}$

$$Q_{ENTRA} = Qo$$
$$Q_{SALE} = u \cdot Ao$$

$$V = Ae \cdot H(t) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = Ae \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow Ae \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t} = Qo - u \cdot Ao \Rightarrow u = \frac{Qo}{Ao} - \frac{Ae}{Ao} \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = -\frac{Ae}{Ao} \cdot \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}$$

Euler en la tubería: $\frac{L}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + B_1 - B_0 = 0$

$$B_0 = H(t)$$

$$u_1 \cdot Ao = u \cdot Ao = u_2 \cdot Cc \cdot Av \Rightarrow u_2(t) = \left(\frac{Ao}{Cc \cdot Av}\right) \cdot u(t)$$

$$B_1 = B_2 = \frac{u_2^2}{2 \cdot g} = \left(\frac{Ao}{Cc \cdot Av}\right)^2 \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{g} \cdot -\frac{Ae}{Ao} \cdot \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2} + \left(\frac{Ao}{Cc \cdot Av}\right)^2 \cdot \left[\frac{Qo}{Ao} - \frac{Ae}{Ao} \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t}\right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot g} - H(t) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Además, $H(t) = Ho + \beta \cdot sen(\omega \cdot t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial H(t)}{\partial t} = \beta \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\mathbf{;}\ \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2} = -\beta \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{g} \cdot \left(-\frac{Ae}{Ao} \cdot -\beta \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t)\right) + \left(\frac{Ao}{Cc \cdot Av}\right)^2 \cdot \left[\frac{Qo}{Ao} - \frac{Ae}{Ao} \cdot \beta \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot g} - \left(Ho + \beta \cdot sen(\omega \cdot t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow Av(t) = \frac{\left(\frac{Ao}{Cc}\right)\cdot\left[\frac{Qo}{Ao} - \frac{Ae}{Ao}\cdot\beta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]}{\sqrt{2\cdot g\cdot\left[\left(Ho + \beta\cdot sen(\omega\cdot t) - \frac{L}{g}\cdot\frac{Ae}{Ao}\cdot\beta\cdot\omega^2\cdot sen(\omega\cdot t)\right)\right]}}$$