Sem. Primavera 2007
Auxs.: Sofía Mordojovich
Cristián Godoy

# CI41A – Ejercicio 4
## Martes 30 de Octubre 2007

**P1)** Lamentablemente para usted, ha vuelto a toparse con el agricultor del Control 2. Pero ahora éste tiene un nuevo problema, ya que acaba de enterarse que el canal que traerá el agua hacia su predio pasará por un túnel de gran longitud. Debido a ello, es posible que en parte de su extensión el túnel funcione como una tubería a boca llena. Para ese caso, se ha estimado que el coeficiente friccional de Darcy-Weisbach es constante e igual a ***f***. El esquema del canal se muestra en la Figura 1. El agua es extraída desde un embalse de cota constante.

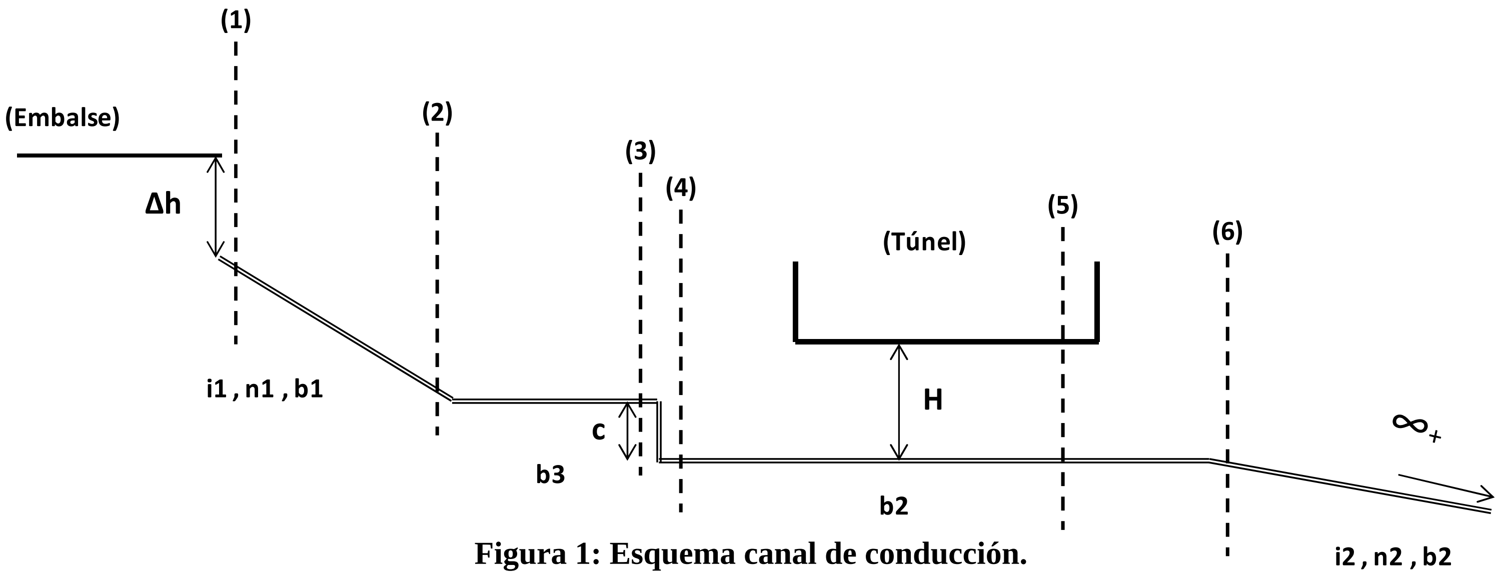



**Figura 1: Esquema canal de conducción.**

Para las condiciones indicadas anteriormente, se pide:

a) Determinar el caudal conducido por el canal.
b) Determine las alturas de escurrimiento al interior del canal, en las secciones indicadas.
c) Identificar la presencia de resaltos, indicando su ubicación aproximada.
d) Determinar la longitud ***L*** al interior del túnel que se encuentra funcionando como una tubería.

***Datos:***

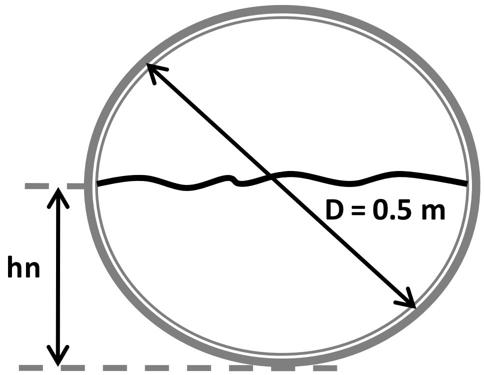
| Datos del problema | | | |
|---|---|---|---|
| Δh [m] = | 1.2 | i2 [m/m] = | 0.0055 |
| H [m] = | 0.6 | i1 [m/m] = | 0.02 |
| c [m] = | 0.3 | n1 = | 0.011 |
| b3 [m] = | 0.25 | n2 = | 0.012 |
| b1 [m] = | 0.35 | f = | 0.0136 |
| b2 [m] = | 0.3 | | |

***Indicaciones:***

- Considere que los tramos con pendiente son suficientemente largos para que el eje hidráulico se desarrolle completamente.
- Todos los tramos son suficientemente largos para que en ellos existan resaltos.
- Desprecie las pérdidas de energía singulares, excepto las de los resaltos.
- Desprecie la pérdida friccional en el tramo horizontal de ancho $b_3$, pues es de corta longitud.
- Desprecie la pérdida friccional en la zona aguas abajo de la grada, hasta el punto en donde el resalto entra en presión.

**P2)** Se tiene la alcantarilla para aguas lluvias, mostrada en la Figura 2. En el flujo es además transportado material sólido, por lo cual no se debe tener una velocidad inferior a 1 m/s.

Determine la pendiente mínima que se le debe dar a la alcantarilla con el fin de cumplir con esta restricción, en condiciones de flujo uniforme. Los datos del diseño se muestran a continuación.




| Datos | |
|---|---|
| Q [lt/s] = | 150 |
| n = | 0.012 |
| D [m] = | 0.5 |
| i (%) = | ?? |

***Pauta Problema #1:***

Necesitamos determinar el caudal que escurre por el sistema. Para esto, supondremos que existe crisis en la entrada debido a que el primer tramo posee una pendiente fuerte, y luego corroboraremos esta hipótesis.

Suponemos crisis en la entrada (Tramo 1 => P.F.)

$$\Delta h = E_{c1} = 1.2\,m \;\Rightarrow\; h_{c1} = \frac{2}{3}1.2 = 0.8\,m$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{h_{c1}^{\,3}\, g\, b_1^{\,2}} = 0.784\,m^3/s$$

Calculando la altura normal asociada al tramo:

$$\frac{Q\,n_1}{\sqrt{i_1}} = \Omega_1\, R_{h1}^{\,2/3} \Rightarrow \frac{Q\,n_1}{\sqrt{i_1}} = \frac{(b_1\, h_{n1})^{5/3}}{(2\,h_{n1} + b_1)^{2/3}} \Rightarrow h_{n1} = 0.653\,m$$

$$\Rightarrow h_{n1} < h_{c1} \Rightarrow \textit{Pendiente Fuerte}$$

Con esto tenemos que la altura en (1) es igual a $h_{c1}$. Asumiendo que en (2) se alcanza la altura normal:

$h_2 = h_{n1} = 0.653$ m

Calculemos la altura crítica asociada al ancho $b_3$,

$$E_{c3} = \frac{3}{2}h_{c3} = \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{g\, b_3^{\,2}}\right)^{1/3} = 1.502\,m \;\Rightarrow\; h_{c3} = 1.001\,m$$

Ahora calculamos la energía en (2) y verificamos que el escurrimiento tenga suficiente energía para escurrir:

$$E_2 = E_{hn1} = \frac{Q^2}{2g\,(b_1 h_{n1})^2} + h_{n1} = 1.253\,m < E_{c3} = 1.502\,m$$

$$\Rightarrow \text{Crisis en (3)}$$

Por lo tanto,

$$h_3 = h_{c3} = 1.001\,m$$

Calculamos la momenta para este punto, con lo que podremos conocer el posicionamiento aproximado del resalto entre este punto y el tramo con pendiente $i_1$.

$$M_3 = \frac{Q^2}{g\,(b_3 h_3)} + \frac{h_3^{\,2} b_3}{2} = 0.376\,m^3$$

$$M_2 = \frac{Q^2}{g\,(b_1 h_{n1})} + \frac{h_{n1}^{\,2} b_1}{2} = 0.349\,m^3$$

- ⇨ $M_3 > M_2$ => el resalto se ahoga hacia el tramo de pendiente $i_1$.

Analizando desde la grada hacia aguas abajo se puede estimar la energía en (4):

$$E_4 = E_3 + c = 1.502 + 0.3 = 1.802 \ m.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_{4sub} = 1.678 \, m \\ h_{4\sup} = 0.522 \, m \ (Solución) \end{cases}$$

Analicemos que ocurre con el tramo de aguas abajo con pendiente $i_2$:

$$h_{c2} = \left( \frac{Q^2}{g b_2^{\ 2}} \right)^{1/3} = 0.887 \, m \Rightarrow E_{c2} = 1.331 \, m$$

$$h_{n2} = ?? \quad \Rightarrow \frac{Q \, n_2}{\sqrt{i_2}} = \frac{\left(b_2 \, h_{n2}\right)^{5/3}}{\left(b_2 + 2 h_{n2}\right)^{2/3}} \Rightarrow h_{n2} = 1.591 m$$

$$\Rightarrow h_{n2} > h_{c2} \ \Rightarrow Pendiente \ Suave$$

Dado que se tiene una pendiente suave y el tramo es suficientemente largo para que se desarrolle el eje hidráulico completo, en (6) se tendrá altura normal de río (sub-crítico).

$$\Rightarrow h_6 = 1.591 m$$

Igualando energía entre (6) y (5) se tiene (se desprecian pérdidas singulares), y considerando que escurrimiento se encuentra en presión, podemos determinar el término de presión $\eta_5$.

$$E_6 = \frac{Q^2}{2g\left(b_2 h_{n2}\right)^2} + h_{n2} = 1.729 \, m$$

$$\Rightarrow E_5 = 1.729 \, m = \frac{Q^2}{2g\left(b_2 H\right)^2} + \left( \frac{H}{2} + \eta_5 \right) \Rightarrow \eta_5 = 0.461 m$$

Ahora deberemos calcular las momentas en (4) y (5), para conocer la posición aproximada del resalto.

$$M_4 = \frac{Q^2}{g\left(b_2 h_4\right)} + \frac{h_4^{\ 2} b_2}{2} = 0.441 m^3$$

$$M_5 = \frac{Q^2}{g\left(b_2 H\right)} + \left(H \, b_2\right)\eta_5 = 0.431 m^3$$

$$\Rightarrow M_4 > M_5 \Rightarrow \text{El resalto se encuentra al interior del túnel.}$$

Dado que no existen pérdidas en el tramo aguas debajo de la grada, el resalto existente obligadamente deberá tener una de sus alturas igual a $h_4$. Así, calcularemos la altura conjugada para la momenta de (4) para determinar el término de presión $\eta_4$ del resalto en incompleto.

$$M_4 = 0.441\, m^3 = \frac{Q^2}{g(b_2 H)} + (H\, b_2)\eta_4 \Rightarrow \eta_4 = 0.516\, m$$

Los términos η calculados, corresponden a la presión al interior del túnel en el centro de gravedad de la sección. Conocemos que las pérdidas friccionales al interior de una tubería corresponden a la pérdida de presión, asumiendo que la cota de fondo es la misma. Así, la diferencia entre $\eta_4$ y $\eta_5$ corresponde a la energía perdida por fricción.

Utilizando Darcy-Weisbach podemos plantear:

$$\eta_4 - \eta_5 = \frac{f\, L}{D} \frac{Q^2}{2g(b_2 H)^2}$$

Podemos determinar la relación entre el radio hidráulico y el diámetro de la siguiente forma:

$$R_h = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi}\cancel{R}} = \frac{D}{4} \Rightarrow D = 4R_h$$

Reemplazando en la ecuación para la pérdida se obtiene:

$$\eta_4 - \eta_5 = \frac{f\, L}{4R_h} \frac{Q^2}{2g(b_2 H)^2} = \frac{f\, L}{4} \frac{(b_2 + 2H)}{(b_2\, H)} \frac{Q^2}{2g(b_2 H)^2}$$

$$\Rightarrow L = 2.017\, m$$

***Pauta Problema #2:***

La restricción del problema es tener una velocidad mínima igual a 1 m/s. Así, se tiene:

$$\frac{Q}{\Omega} \geq 1 \ m/s \Rightarrow Q \approx \Omega$$

Además se conoce para un acueducto:

$$\Omega = \frac{D^2}{8}\left(\theta - Sen(\theta)\right) \quad y \quad \chi = \theta \frac{D}{2}$$

Conocido el caudal circulante, podemos determinar el valor de θ para el cual se cumple $Q \approx \Omega$.

$$Q = \Omega = \frac{D^2}{8}\left(\theta - Sen(\theta)\right) \Rightarrow \left(\theta - Sen(\theta)\right) = \frac{8Q}{D^2}$$

$$\Rightarrow \theta = 4.03 rad$$

Conocido el valor de θ y el diámetro, es posible obtener las alturas normales del escurrimiento utilizando:

$$Sen\left(\frac{\theta}{2}\right) D = 2\sqrt{h_n (D - h_n)}$$

$$\Rightarrow h_{n1} = 0.357 m$$

La solución correcta corresponde a $h_n$ = 0.357 m, ya que el valor de θ es mayor que π, con lo que la altura normal debiera de estar en el rango (0.25 m, 0.5 m).

Considerando esta altura en la ecuación de Manning es posible obtener:

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\left(\frac{D^2}{8}\left(\theta - Sen(\theta)\right)\right)^{5/3}}{\left(\theta \frac{D}{2}\right)^{2/3}} \quad \Rightarrow i = \left( \frac{Qn\left(\theta \frac{D}{2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{D^2}{8}\left(\theta - Sen(\theta)\right)\right)^{5/3}} \right)^2 = 0.001823$$

$$\Rightarrow i = 0.1823\%$$