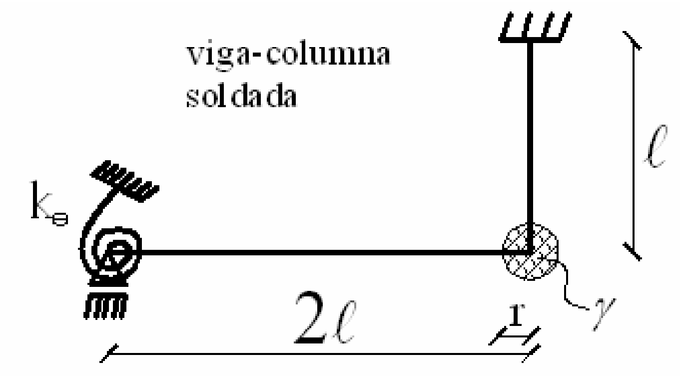
Pauta Control 2

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 2 de Noviembre de 2007

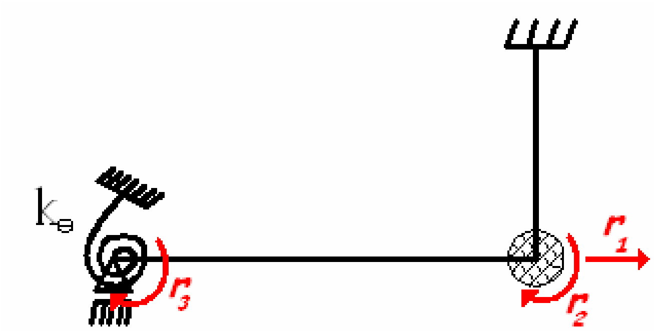
P1. Para la estructura que se muestra en la figura. Determine la Ec. de movimiento del sistema, para ello asuma que β_1=1% y que β_2=3%. Determine adicionalmente los períodos naturales de la estructura.



$$\ell = 2\,m$$
$$EI = 1000\,kgf \cdot m$$
$$\overline{m} = 0$$
$$EA = GA = \infty$$
$$\gamma = 100\,kgf/m^2$$
$$r = 0.5\,m$$
$$k_\theta = 3000\,\frac{kgf \cdot m}{rad}$$

Solución:

- Definición de GDL estáticos:



Los GDL dinámicos son los que poseen masa, en este caso los GDL 1 y 2. Se concluye que hay que condensar la matriz de rigidez a los GDL dinámicos.

- Matriz de Masa:

$$[M]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{r^2}{4}\end{bmatrix}\cdot\frac{\gamma\cdot\pi\cdot r^2}{g}=\begin{bmatrix}8.014 & 0\\ 0 & 0.501\end{bmatrix}$$

- Matriz de Rigidez:

$$[K]=\begin{bmatrix}\dfrac{12EI}{L_c^{\ 3}} & \dfrac{6EI}{L_c^{\ 2}} & 0\\ \dfrac{6EI}{L_c^{\ 2}} & \dfrac{4EI}{L_c}+\dfrac{4EI}{L_v} & \dfrac{2EI}{L_v}\\ 0 & \dfrac{2EI}{L_v} & \dfrac{4EI}{L_v}+k_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1500 & 1500 & 0\\ 1500 & 3000 & 500\\ 0 & 500 & 4000\end{bmatrix}$$

- Matriz de Rigidez Condensada:

A partir de la matriz anterior es posible identificar las sub-matrices asociadas a la condensación como:

$$[K_{aa}]=\begin{bmatrix}1500 & 1500\\ 1500 & 3000\end{bmatrix}\quad ; \quad [K_{ap}]=[K_{pa}]^T=\begin{bmatrix}0\\ 500\end{bmatrix}\quad ; \quad [K_{pp}]=[4000]$$

Luego la matriz de rigidez condensada a los GDL dinámicos es igual a:

$$[\mathrm{K}_{\mathrm{cond}}]=[\mathrm{K}_{\mathrm{aa}}]-[K_{ap}]\cdot[K_{pp}]^{-1}[K_{pa}]=\begin{bmatrix}1500 & 1500\\ 1500 & 2937.5\end{bmatrix}$$

- Períodos de la Estructura:

Partir del problema de valores propios es posible determinar las frecuencias angulares al cuadrado. De las cuales es posible determinar

$$\{\omega_n^{\,2}\} = eigenvals\left([M]^{-1}\cdot[K]\right) = \begin{pmatrix} 90.1 \\ 5961.6 \end{pmatrix}\left[\frac{rad^2}{s^2}\right]$$

$$\Rightarrow \{\omega_n\} = \begin{pmatrix} 9.492 \\ 77.211 \end{pmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right] \quad \Rightarrow T_n = \frac{2\cdot\pi}{\omega_n} = \begin{pmatrix} 0.662 \\ 0.081 \end{pmatrix}\text{seg}$$

- Matriz de Amortiguamiento vía Rayleigth:

Para obtener una matriz de amortiguamiento clásica vía Rayleigth se debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.03 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{9.492} & 9.492 \\ \frac{1}{77.211} & 77.211 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12167 \\ 0.00076 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz de amortiguamiento es igual a:

$$[C] = a\cdot[M] + b\cdot[K] = \begin{bmatrix} 2.110 & 1.135 \\ 1.135 & 2.284 \end{bmatrix}$$

Una forma alternativa sería emplear Penzien-Wilson. (todas las unidades están en kgf, m, s).

Finalmente la ecuación de movimiento es:

$$\begin{bmatrix} 8.014 & 0 \\ 0 & 0.501 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \ddot{r}_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.110 & 1.135 \\ 1.135 & 2.284 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1500 & 1500 \\ 1500 & 2937.5 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{Bmatrix} = \cdot\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(todas las unidades están en kgf, m, s).

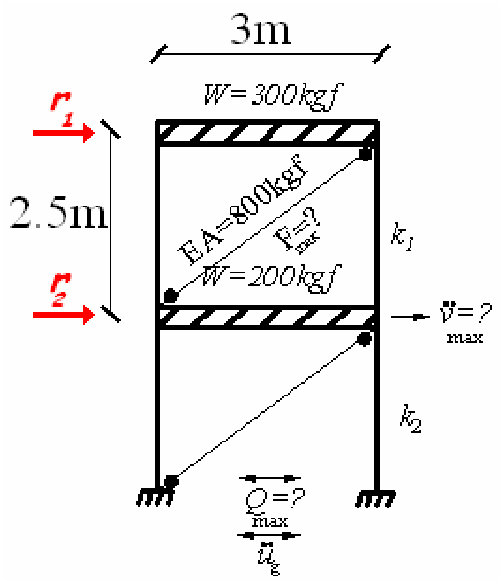
P2. Para la estructura que se muestra en la figura:

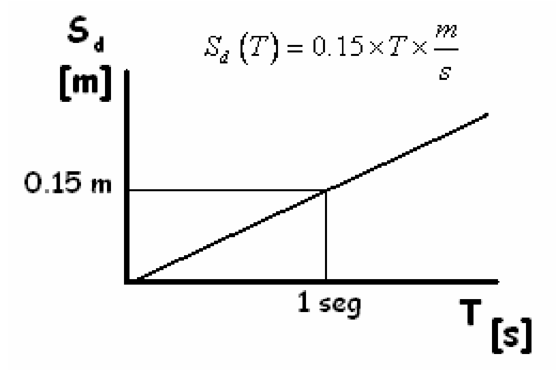
i) Complete la matriz de formas modales. ($[\Phi]$).

ii) Determine el corte basal máximo asumiendo un movimiento horizontal en la base descrito por el espectro de desplazamientos definido en la figura. (Combinación SSRS).

iii) Determine la máxima aceleración del piso inferior. ¿Relativa ó absoluta?.

iv) Determine el máximo esfuerzo de la biela del piso superior.





$$[\Phi]=\begin{bmatrix}0.826 & 0.414\\ 0.563 & ?\end{bmatrix} \qquad T_n=\begin{Bmatrix}0.720\\ 0.227\end{Bmatrix} seg \qquad k_1 \neq k_2$$

Solución:

i) Complete la matriz de formas modales. ($[\Phi]$).

Primero determinamos la matriz de masa:

$$[M]=\begin{bmatrix}300 & 0\\ 0 & 200\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9.8}\cdot\frac{kgf\cdot s^2}{m}=\begin{bmatrix}30.612 & 0\\ 0 & 20.408\end{bmatrix}\cdot\frac{kgf\cdot s^2}{m}$$

Empleando la propiedad de ortogonalidad de modos se tiene que cumplir que:

$$\{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_j\} = 0$$

$$\Rightarrow \{0.826 \quad 0.563\} \cdot \begin{bmatrix} 30.612 & 0 \\ 0 & 20.408 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.414 \\ x \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \{0.826 \quad 0.563\} \cdot \begin{Bmatrix} 12.673 \\ 20.408 \cdot x \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 10.468 + 11.490 \cdot x = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{x = -0.911}$$

De esta forma la matriz de formas modales queda:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.826 & 0.414 \\ 0.563 & -0.911 \end{bmatrix}$$

ii) Determine el corte basal máximo asumiendo un movimiento horizontal en la base descrito por el espectro de desplazamientos definido en la figura. (Combinación SSRS).

Determinamos las masas modales:

$$[Mm] = [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = \begin{bmatrix} 27.4 & 0 \\ 0 & 22.2 \end{bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

Luego los factores de participación modal; como es un edificio de corte asumimos un vector $\{r\} = \{1 \quad 1\}^T$.

$$\{L_m\} = [\Phi]^T \cdot [M] \cdot \{r\}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.826 & 0.414 \\ 0.563 & -0.911 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 30.612 & 0 \\ 0 & 20.408 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36.776 \\ -5.918 \end{Bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

De igual forma se determina las masas modales efectivas como:

$$\{Meff\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{Lm^2}{Mm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 49.411 \\ 1.579 \end{Bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

Se evalúan el espectro de desplazamiento para los períodos de la estructura:

$$S_d = \begin{Bmatrix} 0.108 \\ 0.034 \end{Bmatrix} m$$

Determinamos las frecuencias angulares a partir de los períodos:

$$\{\omega_n\} = \left\{\frac{2\cdot\pi}{T_n}\right\} = \begin{Bmatrix} 8.727 \\ 27.679 \end{Bmatrix} \frac{rad}{s}$$

El Pseudo espectro de aceleración se puede estimar a partir del espectro de desplazamiento como:

$$\{PSa\} = \{Sd\cdot\omega_n^2\} = \begin{Bmatrix} 8.225 \\ 26.087 \end{Bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

Luego el corte basal máximo por modos será:

$$\{Q_m\} = \{Meff\cdot PSa\} = \{Meff\cdot Sd\cdot\omega_n^2\} = \begin{Bmatrix} 406.633 \\ 41.190 \end{Bmatrix} kgf$$

El corte basal máximo se obtiene combinando los máximos cortes por modos, (se emplea SSRS):

$$Q_{max} = \sqrt{406.633^2 + 41.190^2} = 408.714\, kgf$$

iii) Determine la máxima aceleración del piso inferior. ¿Relativa ó absoluta?.

La máxima aceleración de los grados de libertad por modos se obtiene como:

$$\{\ddot{v}_m\} = \phi_i\cdot\frac{Lm_i}{Mm_i}\cdot PSa_i$$

$$\{\ddot{v}_1\} = \phi_1\cdot\frac{Lm_1}{Mm_1}\cdot PSa_1 = \begin{Bmatrix} 0.826 \\ 0.563 \end{Bmatrix}\cdot\frac{36.776}{27.4}\cdot 8.255 = \begin{Bmatrix} 9.152 \\ 6.238 \end{Bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

$$\{\ddot{v}_2\} = \phi_2\cdot\frac{Lm_2}{Mm_2}\cdot PSa_2 = \begin{Bmatrix} 0.414 \\ -0.911 \end{Bmatrix}\cdot\frac{-5.918}{22.2}\cdot 26.087 = \begin{Bmatrix} -2.879 \\ 6.335 \end{Bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

Haciendo combinación según SSRS, se obtiene la máxima aceleración del piso inferior:

$$\ddot{v}_{2-max} = \sqrt{6.238^2 + 6.335^2} = 8.891\frac{m}{s^2}$$

iv) Determine el máximo esfuerzo de la biela del piso superior.

El máximo desplazamiento de los grados de libertad por modos se obtiene como:

$$\{v_m\} = \phi_i \cdot \frac{Lm_i}{Mm_i} \cdot Sd_i$$

$$\{v_1\} = \phi_1 \cdot \frac{Lm_1}{Mm_1} \cdot Sd_1 = \begin{Bmatrix} 0.826 \\ 0.563 \end{Bmatrix} \cdot \frac{36.776}{27.4} \cdot 0.108 = \begin{Bmatrix} 0.120 \\ 0.082 \end{Bmatrix} m$$

$$\{v_2\} = \phi_2 \cdot \frac{Lm_2}{Mm_2} \cdot Sd_2 = \begin{Bmatrix} 0.414 \\ -0.911 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-5.918}{22.2} \cdot 0.034 = \begin{Bmatrix} -0.00375 \\ 0.00826 \end{Bmatrix} m$$

Luego el desplazamiento relativo máximo del piso superior por modos es:

$$\{\Delta v_1\} = 0.120 - 0.082 = 0.038m$$

$$\{\Delta v_2\} = -0.00375 - 0.00826 = -0.012m$$

Combinando ambos desplazamientos modales se obtiene:

$$\left\{\Delta v_{\max}{}^{(1)}\right\} = \sqrt{0.038^2 + 0.012^2} = 0.0398m$$

El ángulo con respecto a la horizontal de la biela y su largo son:

$$\alpha = a\tan\left(\frac{2.5}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 39.8^{o} \quad L_{biela} = \sqrt{3^2 + 2.5^2} = 3.905m$$

Luego el máximo esfuerzo de la biela será su rigidez**.**

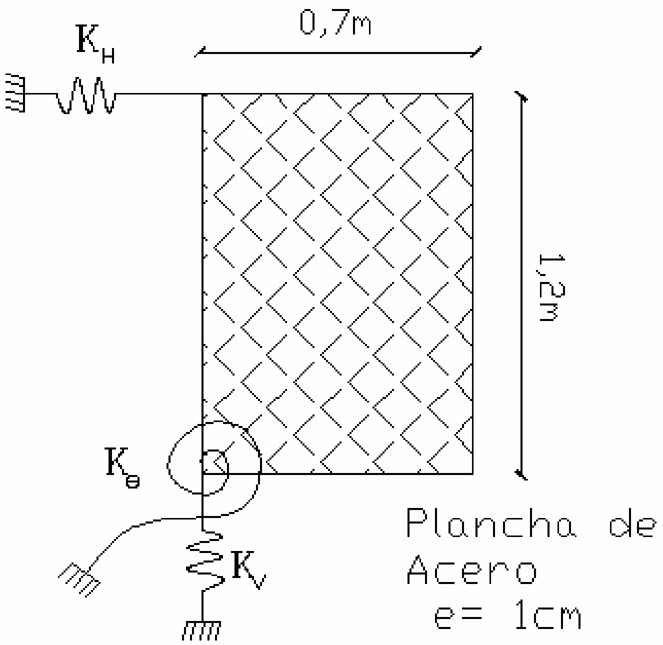
$$F_{biela} = \frac{EA}{L_{biela}} \cdot \cos(39.8^{o}) \cdot 0.0398m = 6.271\ kgf$$

P3. Para la estructura que se muestra en la figura, determine:

i) Matriz de masa ($[M]$) y de Rigidez ($[K]$).

ii) Formas Modales ($[\Phi]$) normalizadas por la masa modal y períodos $\{T_n\}$.

iii) Vector de influencia sísmico ($\{r\}$) ante un sismo horizontal en la base.



$$K_H = 2000\frac{kgf}{m}$$

$$K_v = 4000\frac{kgf}{m}$$

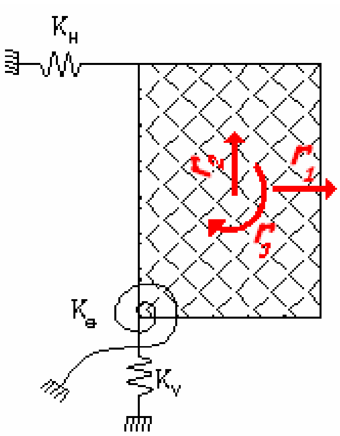
$$K_\theta = 1000\frac{kgf\cdot m}{rad}$$

$$\gamma_{acero} = 7850\frac{kgf}{m^3}$$

Solución:

i) Matriz de masa ($[M]$) y de Rigidez ($[K]$).

Se definen los GDL, en este caso se colocan en el centro de masas, para tener una matriz de masa desacoplada. (La solución puede ser hecha imponiendo 3 GDL en cualquier posición).



Luego la matriz de masas es igual a:

$$[M]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{a^2+b^2}{12}\end{bmatrix}\cdot\frac{\gamma_{acero}\cdot a\cdot b\cdot e}{g}=\begin{bmatrix}6.729 & 0 & 0\\ 0 & 6.729 & 0\\ 0 & 0 & 1.082\end{bmatrix}$$

Donde $a=0.7m$, $b=1.2m$ y $e=0.01m$. (Unidades en kgf, m y seg).

La matriz de Rigidez será:

$$[K]=\begin{bmatrix}K_H & 0 & \dfrac{K_H\cdot b}{2}\\ 0 & K_v & \dfrac{K_V\cdot a}{2}\\ \dfrac{K_H\cdot b}{2} & \dfrac{K_v\cdot a}{2} & K_\theta+\dfrac{K_v\cdot a^2}{4}+\dfrac{K_H\cdot b^2}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2000 & 0 & 1200\\ 0 & 4000 & 1400\\ 1200 & 1400 & 2210\end{bmatrix}$$ (Unidades en kgf, m y seg).

ii) Formas Modales ($[\Phi]$) normalizadas por la masa modal y períodos $\{T_n\}$.

Períodos de la estructura:

$$\{\omega_n{}^2\}=eigenvals\left([M]^{-1}\cdot[K]\right)=\begin{pmatrix}2298.9\\ 114.9\\ 490.1\end{pmatrix}\left[\frac{rad^2}{s^2}\right]$$

$$\Rightarrow\{\omega_n\}=\begin{pmatrix}47.947\\ 12.039\\ 22.137\end{pmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right]\Rightarrow T_n=\frac{2\cdot\pi}{\omega_n}=\begin{pmatrix}0.131\\ 0.522\\ 0.284\end{pmatrix}\text{seg}$$

Formas modales:

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}-0.088 & -0.728 & 0.383\\ -0.121 & -0.288 & -0.826\\ -0.989 & 0.622 & 0.414\end{bmatrix}$$ (los que me dio mi calculadora).

Masas Modales:

$$[M_m]=[\Phi]^T\cdot[M]\cdot[\Phi]=\begin{bmatrix}1.208 & 0 & 0\\ 0 & 4.545 & 0\\ 0 & 0 & 5.759\end{bmatrix}$$ (los que me dio mi calculadora).

Luego las formas modales normalizadas son:

$$\{\tilde{\phi}_i\}=\frac{\{\phi_i\}}{\sqrt{M_{m_i}}}$$

$$\Rightarrow\ [\tilde{\Phi}]=\begin{bmatrix}-0.080 & -0.342 & 0.160\\ -0.110 & -0.135 & -0.344\\ -0.900 & 0.292 & 0.173\end{bmatrix}$$

iii) Vector de influencia sísmico ($\{r\}$) ante un sismo horizontal en la base.

$$\{r\}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$