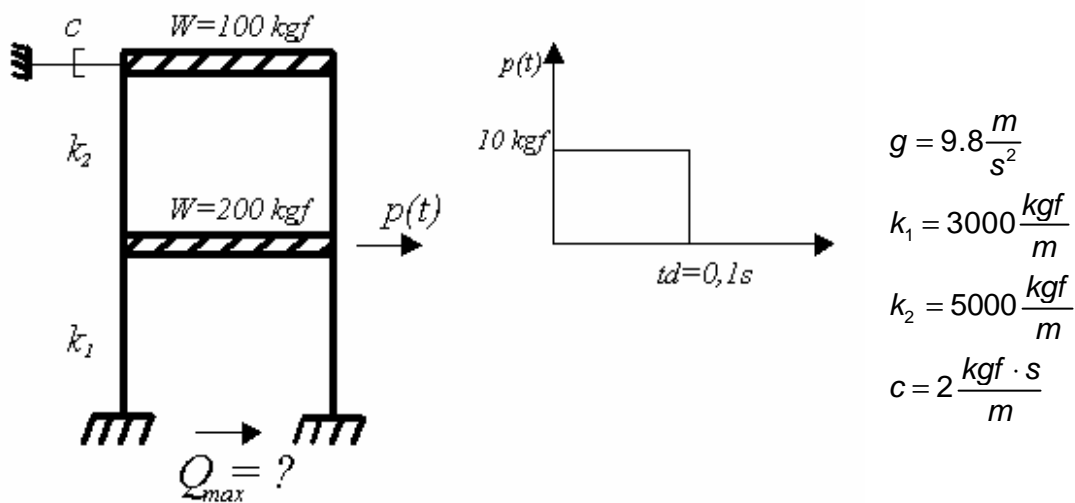


Pauta Examen
CI42G Dinámica de Estructuras
Prof: Rubén Boroscchek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

Jueves 22 de Noviembre de 2007

P1. Para la estructura que se muestra en la figura determine el máximo corte basal, ante un impacto en el primer piso. En todos sus pasos intermedios emplee una matriz de formas modales *normalizadas por la matriz de masa modal*. (**hint:** desprecie los términos fuera de la diagonal en la matriz de amortiguamiento modal $[C_m]$).



Solución:

Matriz de masa y rigidez:

$$[M] = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9.8} = \begin{bmatrix} 10.204 & 0 \\ 0 & 20.408 \end{bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & -5000 \\ -5000 & 8000 \end{bmatrix} \cdot \frac{kgf}{m}$$

Valores propios, frecuencias y periodos:

$$\{\mathbf{w}_n^2\} = \text{eigenvals}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{pmatrix} 790.93 \\ 91.07 \end{pmatrix} \left[\frac{rad^2}{s^2} \right]$$

$$\Rightarrow \{\mathbf{w}_n\} = \begin{pmatrix} 28.123 \\ 9.543 \end{pmatrix} \left[\frac{rad}{s} \right] \Rightarrow T_n = \frac{2 \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{w}_n} = \begin{pmatrix} 0.223 \\ 0.658 \end{pmatrix} \text{seg}$$

Formas modales:

$$[f] = \text{eigenvecs}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{bmatrix} 0.852 & 0.775 \\ -0.523 & 0.631 \end{bmatrix}$$

Normalización de la forma modal, primero determinamos las masas modales de acuerdo a las formas modales obtenidas:

$$[M_m] = [F]^T \cdot [M] \cdot [F] = \begin{bmatrix} 12.9990.000 & \\ 0.000 & 14.272 \end{bmatrix}$$

Luego las formas modales normalizadas son:

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}_i\} &= \frac{\{f_i\}}{\sqrt{M_{m_i}}} \\ \Rightarrow [\tilde{F}] &= \begin{bmatrix} 0.236 & 0.205 \\ -0.145 & 0.167 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Empleando esta normalización se tiene que $[M_m] = [\lambda] = [\zeta]$; $[K_m] = [\omega_n^2]$

Matriz de amortiguamiento por generación directa:

$$[C] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{m}$$

De esta forma la matriz de amortiguamiento modal es:

$$[C_m] = [f]^T \cdot [C] \cdot [f] = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.097 \\ 0.097 & 0.084 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{m}$$

Despreciando los términos fuera de la diagonal se puede asumir:

$$\begin{aligned} [C_m] &= \begin{bmatrix} 0.112 & 0 \\ 0 & 0.084 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{m} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \overbrace{M_{m-2}}^1 \cdot b_2 \cdot w_2 & 0 \\ 0 & 2 \cdot \underbrace{M_{m-1}}_1 \cdot b_1 \cdot w_1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow b_1 &= \frac{0.084}{2 \cdot 9.543} = 0.44\% & b_2 &= \frac{0.112}{2 \cdot 28.123} = 0.20\% \end{aligned}$$

Notar que los amortiguamientos obtenidos son muy bajos por tanto la solución puede ser obtenida despreciando el amortiguamiento.

Si analizamos la razón entre el tiempo de duración del impacto y los períodos de la estructura se obtiene:

$$\frac{t_d}{T_1} = 0.152 < 0.25 \quad ; \quad \frac{t_d}{T_2} = 0.448 \not< 0.25$$

De esa forma es válido obtener la respuesta del modo fundamental asumiendo impacto de corta duración, sin embargo el segundo modo no puede ser resultado empleando impacto de corta duración.

A pesar de esto, en el examen se dio la indicación que se permitía resolver el problema considerando la aproximación de impacto corto para el segundo modo, aunque esta suposición sea una mala aproximación. Como el corte en la base está controlado fundamentalmente por el modo fundamental no se debieran tener malos resultados.

Las cargas modales pueden ser obtenidas pre-multiplicando por $[\mathbf{f}]^T$ al vector de cargas nodales:

$$\rho_n(t) = [\mathbf{f}]^T \cdot \{P(t)\} = \begin{bmatrix} 0.236 & 0.205 \\ -0.145 & 0.167 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.145 \cdot \rho(t) \\ 0.167 \cdot \rho(t) \end{Bmatrix}$$

De esta forma los desplazamientos modales serán:

$$Y_n(t) = \frac{e^{-b_n w_n t}}{\underbrace{M_{m-n}}_1 \cdot w_n} \cdot \rho_n(t) \cdot t_d \cdot \text{sen}(w_{d-n} \cdot t)$$

Como los amortiguamientos son tan bajos las frecuencias angulares amortiguadas son idénticas a las frecuencias angulares ($\lim_{b \rightarrow 0} w_d = \lim_{b \rightarrow 0} w \cdot \sqrt{1 - b^2} = w$). De este modo:

$$Y_1(t) = \frac{e^{-0.00449 \cdot 9.543 t}}{9.543 \text{ rad/seg}} \cdot 0.167 \cdot 10 \text{ kgf} \cdot 0.1 \text{ seg} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot t)$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = 0.0175 \cdot e^{-0.042 t} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot t)$$

$$Y_2(t) = \frac{e^{-0.002028 \cdot 28.123 t}}{28.123 \text{ rad/seg}} \cdot -0.145 \cdot 10 \text{ kgf} \cdot 0.1 \text{ seg} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot t)$$

$$\Rightarrow Y_2(t) = -0.0052 \cdot e^{-0.056 t} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot t)$$

De esta forma se puede obtener el desplazamiento del piso inferior como:

$$v_2(t) = \sum f_{n,2} \cdot Y_n(t)$$

$$v_2(t) = 0.167 \cdot 0.0175 \cdot e^{-0.042t} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot t) + 0.145 \cdot 0.0052 \cdot e^{-0.056t} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot t)$$

$$= 0.00292 \cdot e^{-0.042t} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot t) + 0.00075 \cdot e^{-0.056t} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot t)$$

De esta forma se puede obtener el corte en la base multiplicando por la rigidez del piso como:

$$Q(t) = 3000 \cdot \frac{\text{kgf}}{m} \cdot [0.00292 \cdot e^{-0.042t} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot t) + 0.00075 \cdot e^{-0.056t} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot t)] \quad (\text{Ec.1})$$

$$= 8.767 \cdot e^{-0.042t} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot t) + 2.243 \cdot e^{-0.056t} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot t)$$

Esta función posee infinitos máximos (o mínimos) locales, el máximo global del corte corresponde al máximo de los máximos locales (ó mínimos). De esta forma, siempre es conveniente graficar la función en el tiempo para determinar el máximo global (*Figura 1*). En la Nota final del problema se presenta el gráfico del corte v/s el tiempo, donde se aprecia que el sexto máximo local corresponde al máximo global del corte.

Como primera aproximación se puede asumir que el corte basal es controlado por el primer modo, de este modo consideraremos el máximo global en un tiempo igual a $T_1/4$ ($t_{\max} = 0.1645$ seg).

$$t_{\max} \approx \frac{T_1}{4} = \frac{0.658 \text{ seg}}{4} = 0.1645 \text{ seg}$$

$$\Rightarrow Q_{\max} \approx 8.767 \cdot e^{-0.0420 \cdot 0.1645} \cdot \text{sen}(9.543 \cdot 0.1645) + 2.243 \cdot e^{-0.0560 \cdot 0.1645} \cdot \text{sen}(28.123 \cdot 0.1645)$$

$$Q_{\max} \approx 6.5 \text{ kgf}$$

Si esta función es graficada (*Figura 1*) se obtiene el corte máximo igual a **8.9 kgf**. (se considera ambas soluciones correctas en la corrección).

Nota:

En la *Figura 1* se grafica el corte en función del tiempo de acuerdo a la Ec.1 empleando teoría de impacto corto. Adicionalmente se grafica la solución exacta obtenida vía integración paso a paso (Newmark) empleando teoría modal y las razones de amortiguamiento (0.44% y 0.20 %, obtenidas despreciando los términos fuera de la diagonal de la matriz de amortiguamiento modal). Adicionalmente se incluye el corte obtenido empleando la matriz de amortiguamiento completa (no clásica) empleando métodos complejos que no trabajan modalmente (CI72C).

Se puede observar que la solución modal despreciando los términos fuera de la diagonal de la matriz de amortiguamiento coincide con la solución empleando la matriz de amortiguamiento completa.

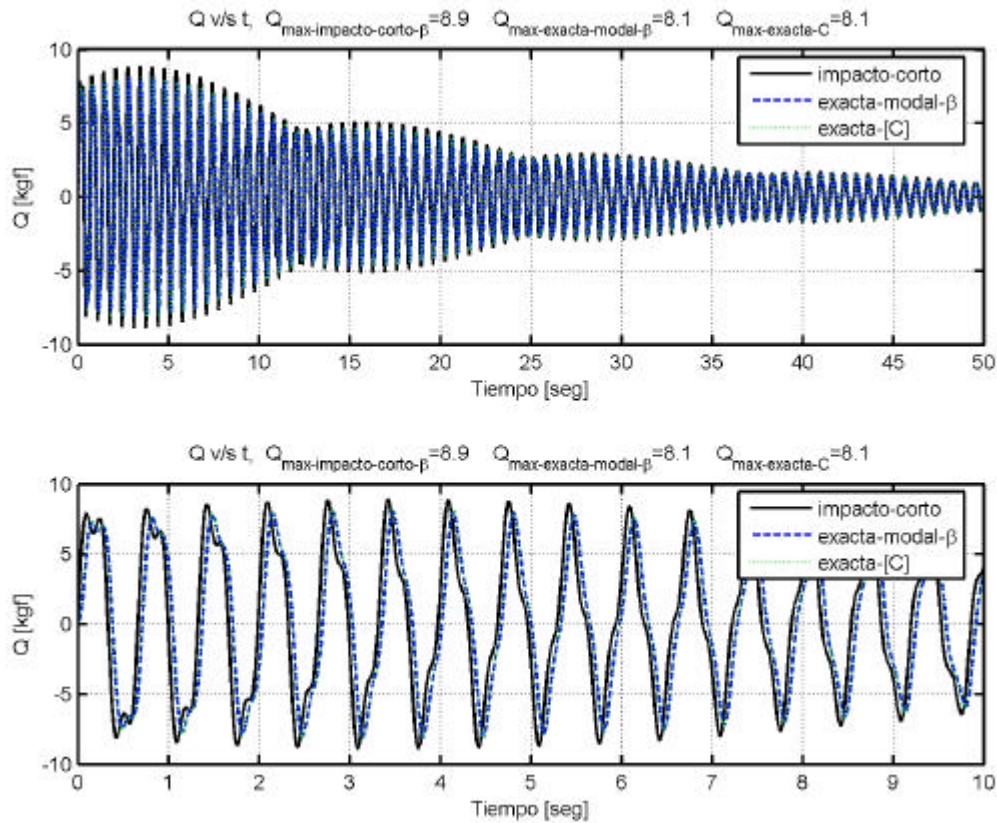


Figura 1: Corte *v/s* el tiempo, comparación empleando 1) teoría de impacto corto y razones de amortiguamiento, 2) Solución exacta (Newmark modal) empleando las razones de amortiguamiento equivalente (matriz clásica). 3) Solución exacta empleando directamente la matriz de amortiguamiento no clásica obtenida por generación directa.

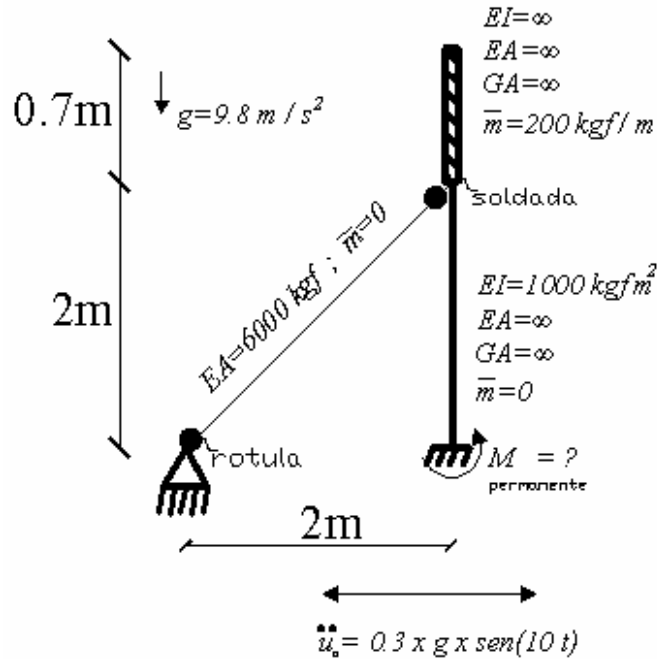
Utilizando la aproximación de impacto de corta duración, se obtiene una solución bastante cercana a la exacta.

Al ser modos de frecuencias medianamente cercanas se produce un fenómeno denominado **Beating**, donde las componentes modales se acoplan y desacoplan a una frecuencia igual a la diferencia entre las frecuencias de cada componente (chinchones).

Los modos al poseer razones de amortiguamientos tan bajas se tiene que el máximo global se produce en el sexto (6) máximo local, ya que controla en parte el fenómeno de **Beating**.

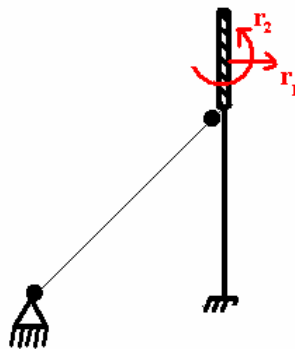
Para determinar el máximo global se debiera emplear un análisis gráfico y/o numérico. De este modo el máximo es de 8.9 empleando teoría de impacto corto, de 8.1 empleando la solución exacta ya sea con la matriz de amortiguamiento clásica o no clásica.

P2. Para la estructura que se muestra en la figura determine el momento en régimen permanente de la base de la columna. En todos sus pasos intermedios emplee una matriz de formas modales normalizadas por la matriz de masa modal. Considere $\beta=5\%$ para todos los modos



Solución:

En primera instancia definimos los GDL en el centro de masa (CM) de la barra.



Los GDL se pueden definir en otra posición, sin embargo se acoplaría la matriz de masa. Esto no es restrictivo en el caso que se consideren los términos fuera de la diagonal. Al final se presenta la solución definiendo los GDL en otra posición.

En caso que no se consideren los GDL en el CM y se asuma diagonal la matriz de masa, máxima nota un 4,0.

La matriz de masa será: (unidades en kgf, m, s). se definen $b=0.7\text{m}$. $L=2\text{m}$.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{12} \end{bmatrix} \cdot \frac{\bar{m} \cdot b}{g} = \begin{bmatrix} 14.286 & 0 \\ 0 & 0.583 \end{bmatrix}$$

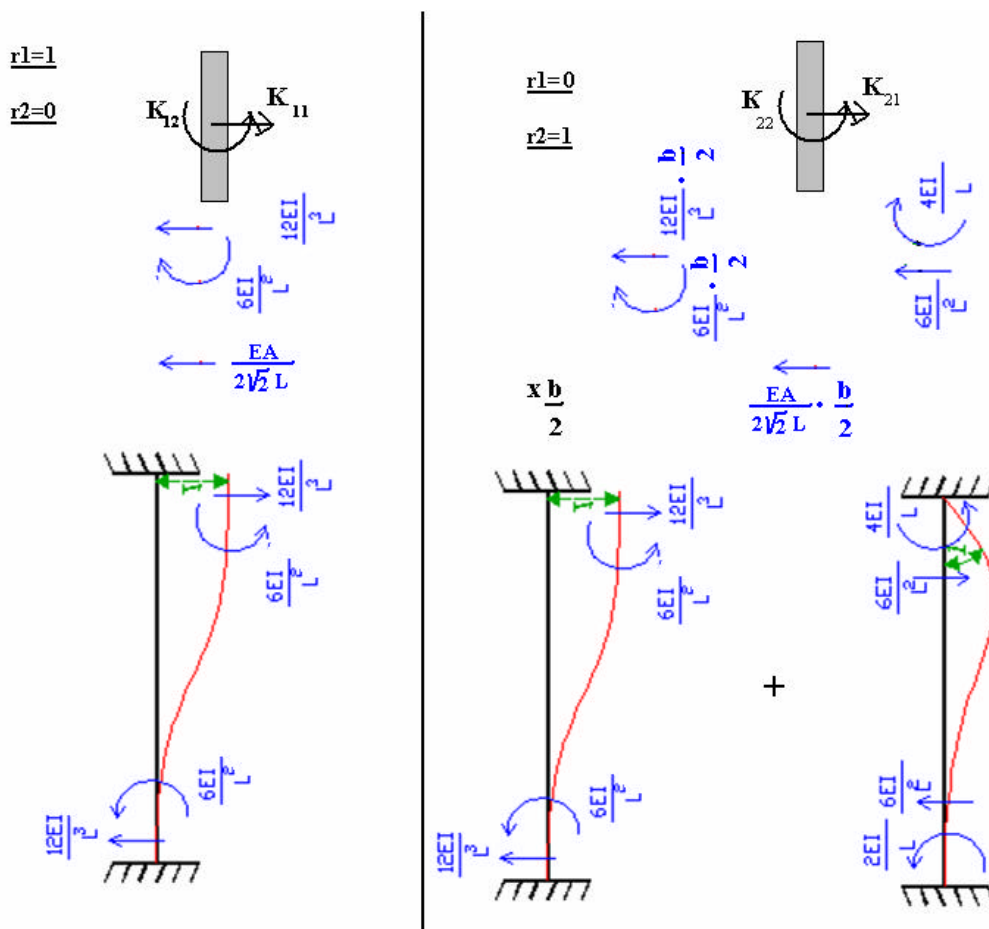
La matriz de rigidez es:

$$K_{11} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} + \frac{EA}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L}$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{6 \cdot EI}{L^2} + K_{11} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6 \cdot EI}{L^2} + \left(\frac{12 \cdot EI}{L^3} + \frac{EA}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L} \right) \cdot \frac{b}{2}$$

$$K_{22} = \left(K_{12} + \frac{6 \cdot EI}{L^2} \right) \cdot \frac{b}{2} + \frac{4 \cdot EI}{L}$$

$$= \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot b + \frac{12 \cdot EI}{L^3} \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \frac{EA}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L} \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \frac{4 \cdot EI}{L}$$



Luego la matriz de rigidez numéricamente es (unidades en kgf, m, s):

$$[K] = \begin{bmatrix} 2561 & 2396 \\ 2396 & 3364 \end{bmatrix}$$

Valores propios, frecuencias y periodos:

$$\begin{aligned} \{\omega_n^2\} &= \text{eigenvals}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{pmatrix} 58.5 \\ 5887 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \right] \\ \Rightarrow \{\omega_n\} &= \begin{pmatrix} 7.65 \\ 76.727 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow T_n = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} = \begin{pmatrix} 0.821 \\ 0.082 \end{pmatrix} \text{seg} \end{aligned}$$

Formas modales:

$$[f] = \text{eigenvecs}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{bmatrix} -0.812 & -0.029 \\ 0.584 & -1.000 \end{bmatrix}$$

Normalización de la forma modal, primero determinamos las masas modales de acuerdo a las formas modales obtenidas:

$$[M_m] = [F]^T \cdot [M] \cdot [F] = \begin{bmatrix} 9.610 & 0 \\ 0 & 0.595 \end{bmatrix}$$

Luego las formas modales normalizadas son:

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}_i\} &= \frac{\{f_i\}}{\sqrt{M_{m_i}}} \\ \Rightarrow [\tilde{F}] &= \begin{bmatrix} -0.262 & -0.038 \\ 0.188 & -1.296 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Empleando esta normalización se tiene que $[M_m] = [\lambda] = [I]$; $[K_m] = [\omega_n^2]$. En adelante trabajaremos con esta forma modal.

El vector de influencia sísmico horizontal es:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De esta forma los factores de participación modal son:

$$\{L_m\} = [f]^T \cdot [M] \{r\} = \begin{Bmatrix} -3.740 \\ -0.544 \end{Bmatrix}$$

De esta forma la fuerza efectiva modal es:

$$p_n(t) = -L_{m-n} \cdot \ddot{u}_g(t) = \underbrace{-L_{m-n} \cdot \ddot{u}_{g-0}}_{p_{0-eff-n}} \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t).$$

Modalmente tenemos la ec. de equilibrio:

$$\ddot{Y}_n(t) + 2 \cdot b_n \cdot w_n \cdot \dot{Y}_n(t) + w_n^2 \cdot Y_n(t) = p_{0-eff-n} \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t)$$

La respuesta en régimen permanente del desplazamiento modal es la clásica del caso armónico.

$$Y_n(t) = \frac{p_{0-eff-n}}{K_{m-n}} \cdot D_n \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t - q_n) = \frac{-L_{m-n} \cdot \ddot{u}_{g-0}}{w_n^2} \cdot D_n \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t - q_n)$$

Donde $\bar{w} = 10 \text{ rad/seg}$:

$$g_n = \frac{\bar{w}}{w_n} = \begin{Bmatrix} 1.307 \\ 0.130 \end{Bmatrix} \Rightarrow D_n = \frac{1}{\sqrt{(1-g_n^2)^2 + (2 \cdot b_n \cdot g_n)^2}} = \begin{Bmatrix} 1.388 \\ 1.017 \end{Bmatrix}$$

$$q = \text{atan}\left(\frac{2 \cdot b_n \cdot g_n}{1-g_n^2}\right) = \begin{Bmatrix} -0.182 \\ 0.013 \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

De esta forma las respuestas modales son: ($\ddot{u}_{g-0} = 0.3 \cdot g = 0.3 \cdot 9.8 \cdot m/s^2$)

$$Y(t) = \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2886 \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t + 0.182) \\ 0.0029 \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t - 0.013) \end{Bmatrix} \cdot m$$

De esta forma los desplazamientos reales son:

$$\{v(t)\} = \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix} = [F] \cdot \{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} -0.0756 \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t + 0.182) - 0.0001 \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t - 0.013) \\ 0.0543 \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t + 0.182) - 0.0038 \cdot \text{sen}(\bar{w} \cdot t - 0.013) \end{Bmatrix}$$

El momento en el tiempo se obtiene directamente de la tabla de rigidez (ver figura).

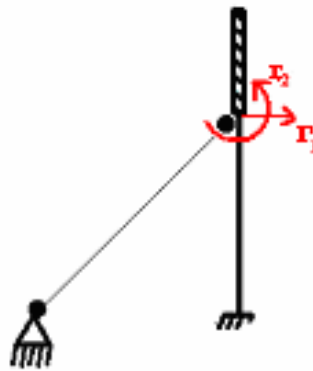
$$M_{base-cul}(t) = \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot v_1(t) + \left(\frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{2EI}{L} \right) \cdot v_2(t)$$

$$M_{base-cul}(t) = -30.406 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t + 0.182) - 5.832 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - 0.013)$$

Nota: El máximo momento será:

$$M_{\max} = \sqrt{\left[-30.406 \cdot \text{sen}(0.182) - 5.832 \cdot \text{sen}(-0.013) \right]^2 + \left[-30.406 \cdot \text{cos}(0.182) - 5.832 \cdot \text{cos}(-0.013) \right]^2} = 36.145 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

Solución definiendo los GDL en otra posición:

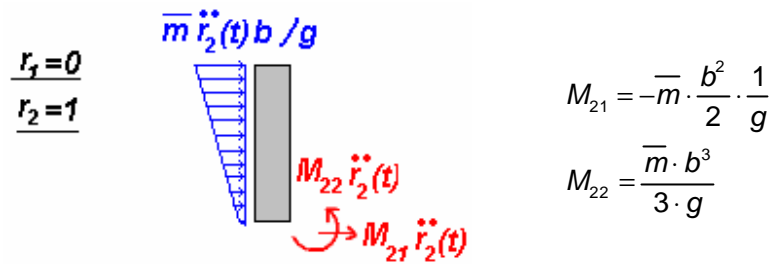


Matriz de rigidez. En este caso es más sencilla. (unidades en kgf, m,seg).

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot EI}{L^3} + \frac{EA}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2561 & 1500 \\ 1500 & 2000 \end{bmatrix}$$

Matriz de Masa:

$$\begin{array}{l} \underline{r_1 = 1} \\ \underline{r_2 = 0} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\bar{m} \ddot{r}_1(t)}{g} \\ \downarrow \\ \text{Diagrama de una viga vertical con una carga distribuida horizontal hacia la izquierda. El eje de pivote está en la base. Se muestran los momentos de inercia $M_{12} \ddot{r}_1(t)$ y $M_{11} \ddot{r}_1(t)$ en rojo.} \end{array} \quad \begin{array}{l} M_{11} = \frac{\bar{m} \cdot b}{g} \\ M_{12} = -\bar{m} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{g} \end{array}$$



$$[M] = \begin{bmatrix} \bar{m} \cdot b & -\frac{\bar{m} \cdot b^2}{2} \\ -\frac{\bar{m} \cdot b^2}{2} & \frac{\bar{m} \cdot b^3}{3} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{g} = \begin{bmatrix} 14.286 & -5 \\ -5 & 2.333 \end{bmatrix}$$

Valores propios, frecuencias y periodos:

$$\{\mathbf{w}_n\} = \text{eigenvals}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{pmatrix} 58.5 \\ 5887 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \right]$$

$$\Rightarrow \{\mathbf{w}_n\} = \begin{pmatrix} 7.65 \\ 76.727 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow T_n = \frac{2 \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{w}_n} = \begin{pmatrix} 0.821 \\ 0.082 \end{pmatrix} \text{seg}$$

Formas modales:

$$[\mathbf{f}] = \text{eigenvecs}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{bmatrix} -0.721 & -0.355 \\ 0.693 & -0.935 \end{bmatrix}$$

Normalización de la forma modal, primero determinamos las masas modales de acuerdo a las formas modales obtenidas:

$$[M_m] = [\mathbf{F}]^T \cdot [M] \cdot [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 13.537 & 0 \\ 0 & 0.521 \end{bmatrix}$$

Luego las formas modales normalizadas son:

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_i\} = \frac{\{\mathbf{f}_i\}}{\sqrt{M_{m_i}}}$$

$$\Rightarrow [\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} -0.196 & -0.492 \\ 0.188 & -1.296 \end{bmatrix}$$

Empleando esta normalización se tiene que $[M_m] = [\lambda] = [1]$; $[K_m] = [\omega_n^2]$. En adelante trabajaremos con esta forma modal.

El vector de influencia sísmico horizontal es:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De esta forma los factores de participación modal son:

$$\{L_m\} = [f]^T \cdot [M] \{r\} = \begin{Bmatrix} -3.740 \\ -0.544 \end{Bmatrix}$$

Notar que los periodos son iguales independientes de la locación de los GDL, las formas modales son dependientes, por ejemplo la segunda fila asociada al giro son iguales ya que ambas son el giro. De esta forma los factores de participación son iguales en ambos casos.

La fuerza efectiva modal es:

$$p_n(t) = -L_{m-n} \cdot \ddot{u}_g(t) = \underbrace{-L_{m-n} \cdot \ddot{u}_{g-0}}_{p_{0-eff-n}} \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t).$$

Modalmente tenemos la ec. de equilibrio:

$$\ddot{Y}_n(t) + 2 \cdot b_n \cdot \omega_n \cdot \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 \cdot Y_n(t) = p_{0-eff-n} \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t)$$

La respuesta en régimen permanente del desplazamiento modal es la clásica del caso armónico.

$$Y_n(t) = \frac{p_{0-eff-n}}{K_{m-n}} \cdot D_n \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - q_n) = \frac{-L_{m-n} \cdot \ddot{u}_{g-0}}{\omega_n^2} \cdot D_n \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - q_n)$$

Donde $\bar{\omega} = 10 \text{ rad/seg}$:

$$g_n = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n} = \begin{Bmatrix} 1.307 \\ 0.130 \end{Bmatrix} \Rightarrow D_n = \frac{1}{\sqrt{(1-g_n^2)^2 + (2 \cdot b_n \cdot g_n)^2}} = \begin{Bmatrix} 1.388 \\ 1.017 \end{Bmatrix}$$

$$q = a \tan\left(\frac{2 \cdot b_n \cdot g_n}{1-g_n^2}\right) = \begin{Bmatrix} -0.182 \\ 0.013 \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

De esta forma las respuestas modales son: ($\ddot{u}_{g-0} = 0.3 \cdot g = 0.3 \cdot 9.8 \cdot m/s^2$)

$$Y(t) = \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2886 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t + 0.182) \\ 0.0029 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - 0.013) \end{Bmatrix} \cdot m$$

De esta forma los desplazamientos reales son:

$$\{v(t)\} = \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix} = [F] \cdot \{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} -0.0565 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t + 0.182) - 0.0014 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - 0.013) \\ 0.0543 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t + 0.182) - 0.0038 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - 0.013) \end{Bmatrix}$$

El momento en el tiempo se obtiene directamente de la tabla de rigidez (ver figura).

$$M_{base-\omega}(t) = \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot v_1(t) + \frac{2EI}{L} \cdot v_2(t)$$

$$M_{base-\omega}(t) = -30.406 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t + 0.182) - 5.832 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t - 0.013)$$

Nota: El máximo momento será:

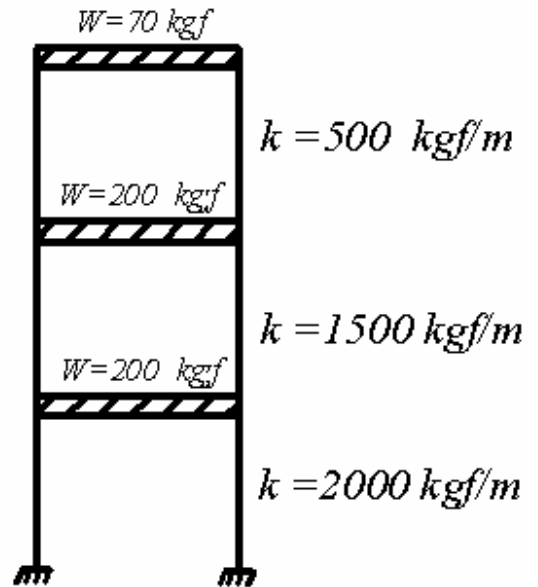
$$M_{\max} = \sqrt{\left[-30.406 \cdot \text{sen}(0.182) - 5.832 \cdot \text{sen}(-0.013) \right]^2 + \left[-30.406 \cdot \text{cos}(0.182) - 5.832 \cdot \text{cos}(-0.013) \right]^2} = 36.145 \text{ kgf} \cdot m$$

P3. Para la estructura que se muestra en la figura determine:

- i) La aceleración máxima de los pisos.
- ii) Los desplazamientos relativos máximos de entre piso.
- iii) El corte máximo basal.
- iv) El diagrama de momento combinado de las columnas.

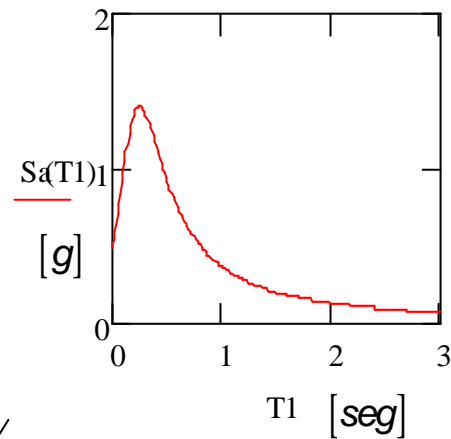
Para ello considere sismo horizontal representado por el espectro. Utilice combinación del tipo SRSS.

En todos sus pasos intermedios emplee una matriz de formas modales normalizadas por la matriz de masa modal



Espectro de aceleraciones sísmico.

$$S_a(T) := 0.5 \frac{\left[1 + 4.5 \left(\frac{T}{0.3} \right)^{1.5} \right]}{\left[1 + \left(\frac{T}{0.3} \right)^3 \right]} \times g$$



$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Solución:

Matriz de masa:

$$[M] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{g} = \begin{bmatrix} 7.143 & 0 & 0 \\ 0 & 20.408 & 0 \\ 0 & 0 & 20.408 \end{bmatrix} \cdot \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{m}$$

Matriz de Rigidez.

$$[K] = \begin{bmatrix} 500 & -500 & 0 \\ -500 & 2000 & -1500 \\ 0 & -1500 & 3500 \end{bmatrix} \cdot \frac{\text{kgf}}{m}$$

Valores propios, frecuencias y períodos:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{w}_n^2\} &= \text{eigenvals}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{pmatrix} 24.045 \\ 95.211 \\ 220.244 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \right] \\ \Rightarrow \{\mathbf{w}_n\} &= \begin{pmatrix} 4.904 \\ 9.758 \\ 14.841 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow T_n = \frac{2 \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{w}_n} = \begin{pmatrix} 1.281 \\ 0.644 \\ 0.423 \end{pmatrix} \text{seg} \end{aligned}$$

Formas modales:

$$[\mathbf{f}] = \text{eigenvecs}([M]^{-1} \cdot [K]) = \begin{bmatrix} 0.806 & -0.894 & 0.249 \\ 0.529 & 0.322 & -0.535 \\ 0.264 & 0.310 & 0.807 \end{bmatrix}$$

Normalización de la forma modal, primero determinamos las masas modales de acuerdo a las formas modales obtenidas:

$$[M_m] = [\mathbf{F}]^T \cdot [M] \cdot [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 11.784 & 0 & 0 \\ 0 & 9.797 & 0 \\ 0 & 0 & 19.583 \end{bmatrix}$$

Luego las formas modales normalizadas son:

$$\{\tilde{F}_i\} = \frac{\{f_i\}}{\sqrt{M_m}}$$

$$\Rightarrow [\tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0.235 & -0.286 & 0.056 \\ 0.154 & 0.103 & -0.121 \\ 0.077 & 0.099 & 0.182 \end{bmatrix}$$

El vector de influencia en un edificio de marco es:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Los factores de participación modal son:

$$\{L_m\} = [F] \cdot [M] \cdot \{r\} = \begin{Bmatrix} 6.394 \\ 2.083 \\ 1.656 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{m}$$

Evaluando el valor del espectro de aceleración de cada modo.

$$S_a(T_i) = \begin{Bmatrix} 2.528 \\ 6.818 \\ 10.987 \end{Bmatrix} \cdot \frac{m}{\text{s}^2}$$

La aceleración Máxima modal será:

$$\{\ddot{Y}_{\max}\} = \frac{L_m}{M_m} \cdot S_a = \begin{Bmatrix} 16.166 \\ 14.200 \\ 18.195 \end{Bmatrix} \frac{m}{\text{s}^2}$$

La aceleración máxima de los GDL por modos se obtienen como:

$$\{\ddot{V}_{i-\max}\} = \{F_i\} \cdot \ddot{Y}_{\max-i} = \begin{bmatrix} 3.797 & -4.058 & 1.025 \\ 2.493 & 1.461 & -2.201 \\ 1.243 & 1.408 & 3.318 \end{bmatrix} \cdot \frac{m}{\text{s}^2}$$

Si empleamos SSRS como criterio de combinación se obtiene la máxima aceleración por piso:

$$\{\ddot{V}_{i-\max}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3.797^2 + 4.058^2 + 1.025^2} \\ \sqrt{2.493^2 + 1.461^2 + 2.201^2} \\ \sqrt{1.243^2 + 1.408^2 + 3.318^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.651 \\ 3.632 \\ 3.813 \end{Bmatrix} \cdot \frac{m}{\text{s}^2}$$

Los máximos desplazamientos de piso por modo se obtienen a partir del pseudo espectro de desplazamiento como:

$$V_{\max-GDL-Modo} = \frac{\{F_i\} \cdot \ddot{Y}_{\max-i}}{?^2_i} = \begin{bmatrix} 0.1579 & -0.0426 & 0.0047 \\ 0.1037 & 0.0153 & -0.0100 \\ 0.0517 & 0.0148 & 0.0151 \end{bmatrix} m$$

Luego se pueden determinar los desplazamientos relativos de entre piso por modo restando los desplazamientos de piso por modo.

$$V_{REL-\max-GDL-Modo} = \frac{\{F_i\} \cdot \ddot{Y}_{\max-i}}{?^2_i} = \begin{bmatrix} -0.0542 & 0.0580 & -0.0146 \\ -0.0520 & -0.0006 & 0.0251 \\ 0.0517 & 0.0148 & 0.0151 \end{bmatrix} m$$

Luego si combinamos los desplazamientos de entre piso se obtiene:

$$\{V_{REL-\max-GDL}\} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{0.0542^2 + 0.0580^2 + 0.0146^2} \\ \sqrt{0.0520^2 + 0.0006^2 + 0.0251^2} \\ \sqrt{0.0517^2 + 0.0148^2 + 0.0151^2} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.058 \\ 0.056 \end{bmatrix} \cdot m$$

El corte máximo basal se puede obtener multiplicando la rigidez del piso inferior por su rigidez:

$$Q_{\text{basal-max}} = 2000 \frac{\text{kgf}}{m} \cdot 0.056m = 111.649 \text{kgf}$$

De igual forma se puede obtener el corte máximo basal empleando la masa modal efectiva:

$$\{M_{\text{eff}}\} = \frac{L_m^2}{\frac{M_m}{1}} = \begin{bmatrix} 40.878 \\ 4.338 \\ 2.743 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{m}$$

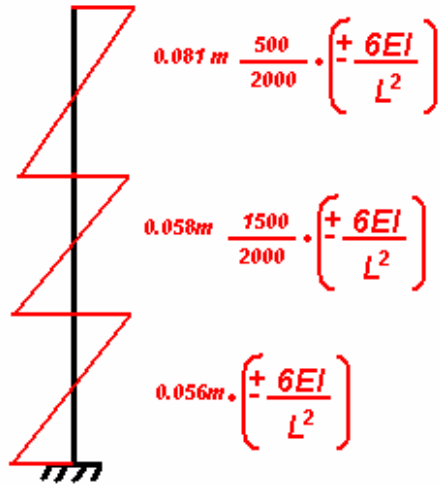
De esta forma el corte por modo es:

$$\{Q_{\text{max-modo}}\} = M_{\text{eff}} \cdot S_a = \begin{bmatrix} 103.357 \\ 29.576 \\ 30.133 \end{bmatrix} \text{kgf}$$

Combinando el corte por modo se obtiene:

$$Q_{\text{max}} = \sqrt{103.357^2 + 29.576^2 + 30.133^2} = 111.649 \text{kgf}$$

El diagrama de momento de la columna se obtiene multiplicando la rigidez de la columna ($6EI/L^2$) por los desplazamientos relativos de entre piso:



En este caso se considero el diagrama normalizando con respecto al EI del piso inferior. Como no se especifico ni EI ni el largo, solo se debe considerar en la corrección la forma del diagrama, y la multiplicación de la rigidez por el desplazamiento relativo del piso.