

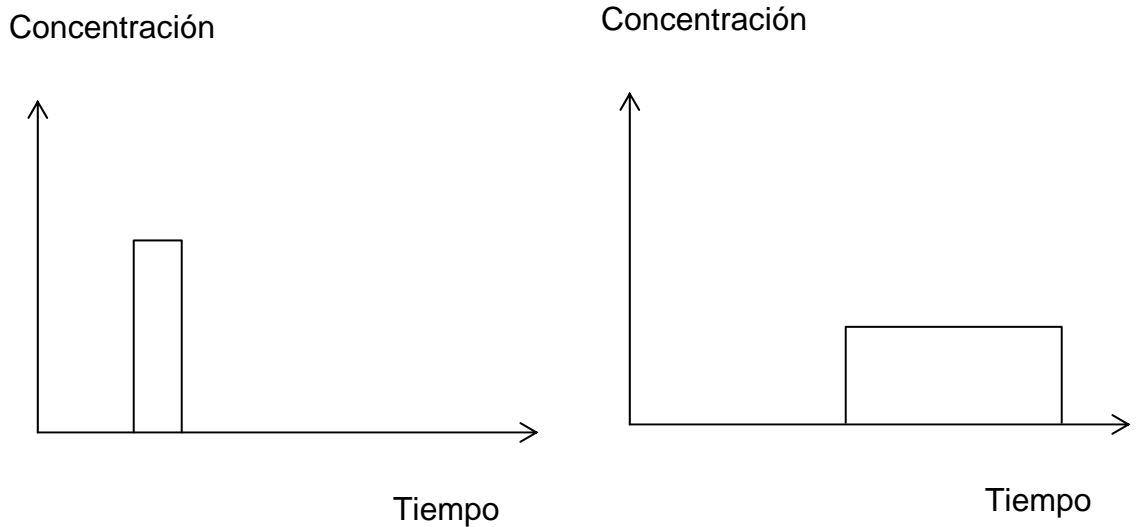
# MODELOS DE CALIDAD DE AGUAS MODELOS DE MEZCLA COMPLETA

por: Jorge Castillo G.

## 1.- Modelos de mezcla completa

Permiten simular el comportamiento de lagos, embalses, lagunas y estanques, secciones de ríos en modelos generalizados.

**Efecto observado:** Desfase y amortiguamiento. Cambios rápidos en el tiempo de una función de entrada salen suavizados y desfasados con respecto a la entrada.

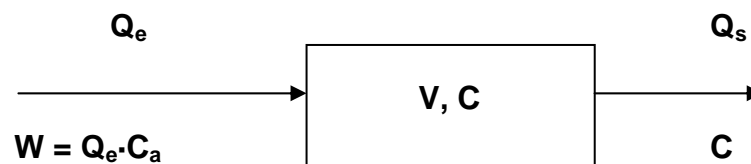


### Hipótesis:

Los contaminantes que entran al sistema se mezclan instantánea y uniformemente en todo el volumen, de modo que no se producen distribuciones especiales de concentración.

### ECUACIÓN GENERAL

Balance de masas en el sistema:



Si existe una reacción dentro del sistema cuya velocidad en términos de masa por unidad de tiempo corresponde a la denominada reacción de primer orden, que establece que la velocidad con que disminuye la concentración de una sustancia es proporcional a la concentración existente en cada instante, es decir,

$$\frac{dM}{dt} = -VKC$$

La ecuación general queda:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}(VC) = V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} = Q_e C_a - Q_s C - VKC$$

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s$$

de donde se desprende que

$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q_e}{V} + K \right) C = \frac{Q_e C_a}{V} = \frac{W}{V}$$

El efecto de la degradación es equivalente a reducir el tiempo de retención. Equivale a reducir el volumen solamente? Como se entiende?

El fenómeno de mezcla completa no se da como tal en la naturaleza, excepto en pequeñas unidades de tratamiento; sin embargo, la única implicancia efectiva de la hipótesis adoptada es que la concentración es uniforme en el volumen de agua, de modo que es válido suponer que la calidad efluente es igual a la calidad que hay dentro del sistema. Existen muchos sistemas en que se produce una distribución aproximadamente uniforme de concentraciones en el volumen, debido a:

- variaciones de la entrada de contaminantes son lentas en el tiempo
- la entrada de contaminantes se realiza en forma distribuida en el perímetro del cuerpo de agua
- existe un buen grado de mezcla asociado a alguna de las condiciones anteriores.

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN

i) **Volumen constante y descarga nula, a partir de  $t = t_0$**

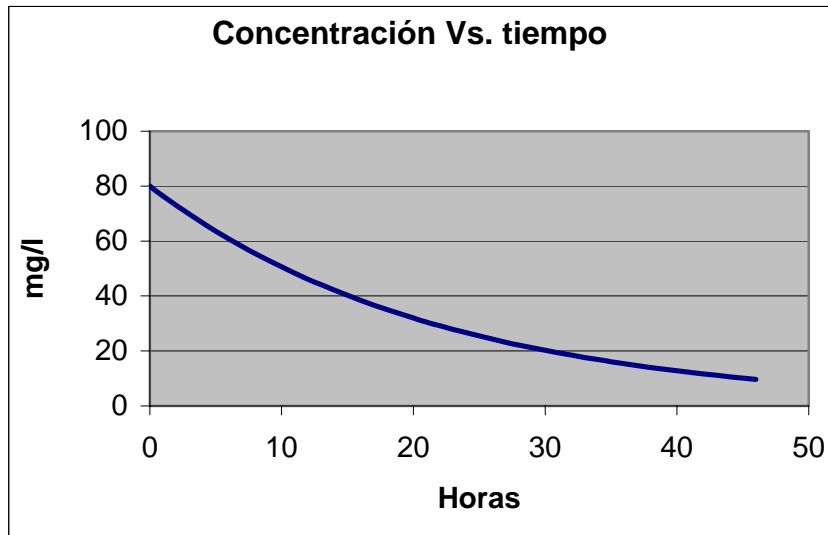
$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q}{V} + K \right) C = 0 \text{ para } t > t_0$$

Solución:

$$C(t) = C_0 e^{-\left(\frac{Q}{V} + K\right)(t-t_0)}$$

para  $t \geq t_0$

En el gráfico siguiente se presenta la forma como varía la concentración en el tiempo para una situación en que  $C_0 = 80$  mg/l en  $t_0 = 0$ .



ii) **Volumen constante y degradación de primer orden, incorporación de W (constante) a partir de  $t = t_0$**

Ecuación:

$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q}{V} + K \right) C = \frac{W}{V} U(t - t_0)$$

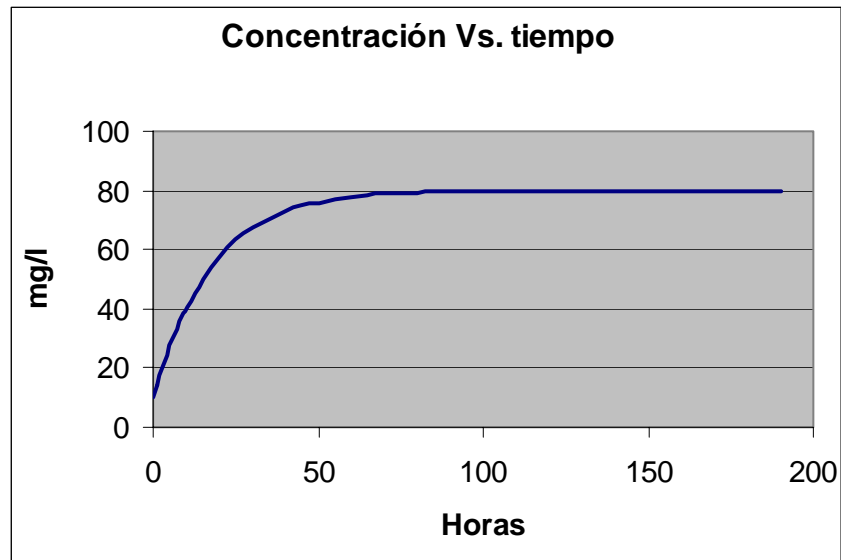
$U(t-t_0)$  = función escalón, definida como

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Solución:

$$C = C_0 e^{-\left(\frac{Q}{V} + K\right)(t-t_0)} + \frac{\frac{W}{Q}}{1 + K\theta} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{Q}{V} + K\right)(t-t_0)} \right]$$

Siendo  $\theta$  el tiempo de retención = volumen /caudal



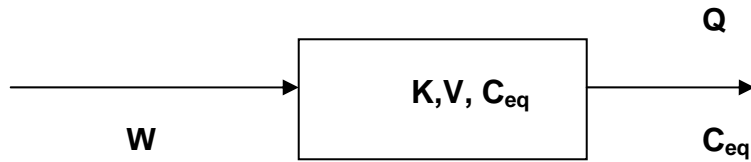
En el gráfico se muestra la variación de concentración para  $C_0=0$  en  $t_0=0$  y concentración de equilibrio de 80 mg/l

El término

$$\frac{\frac{W}{Q}}{1 + k\theta}$$

Correspondía la concentración de equilibrio, es decir aquella que se obtiene cuando la velocidad de entrada de contaminantes equilibra exactamente a la pérdida por degradación.

En el equilibrio:



$$W = KVC_{eq} + QC_{eq} = C_{eq} (KV + Q)$$

de donde

$$C_{eq} = \frac{W}{KV + Q} = \frac{\frac{W}{Q}}{1 + K\theta}$$

iii) Descarga periódica

$$W = W(t) = \bar{W} + \Delta W \operatorname{sen} \omega (t - \delta)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Solución:

$$C(t) = C_0 e^{-\left(\frac{Q}{V} + K\right)t} + \frac{\bar{W}}{1 + K\theta} \left( 1 - e^{-\left(\frac{Q}{V} + K\right)t} \right) +$$

$$\frac{\frac{\Delta W}{V}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\theta} + K\right)^2 + \omega^2}} \left[ \operatorname{sen}(\omega(t - \delta)) - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\frac{1}{\theta} + K} \right] +$$

$$\operatorname{sen} \left( \omega\delta + \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\frac{1}{\theta} + K} \right) e^{-\left(\frac{1}{\theta} + K\right)t} ]$$

desfase:

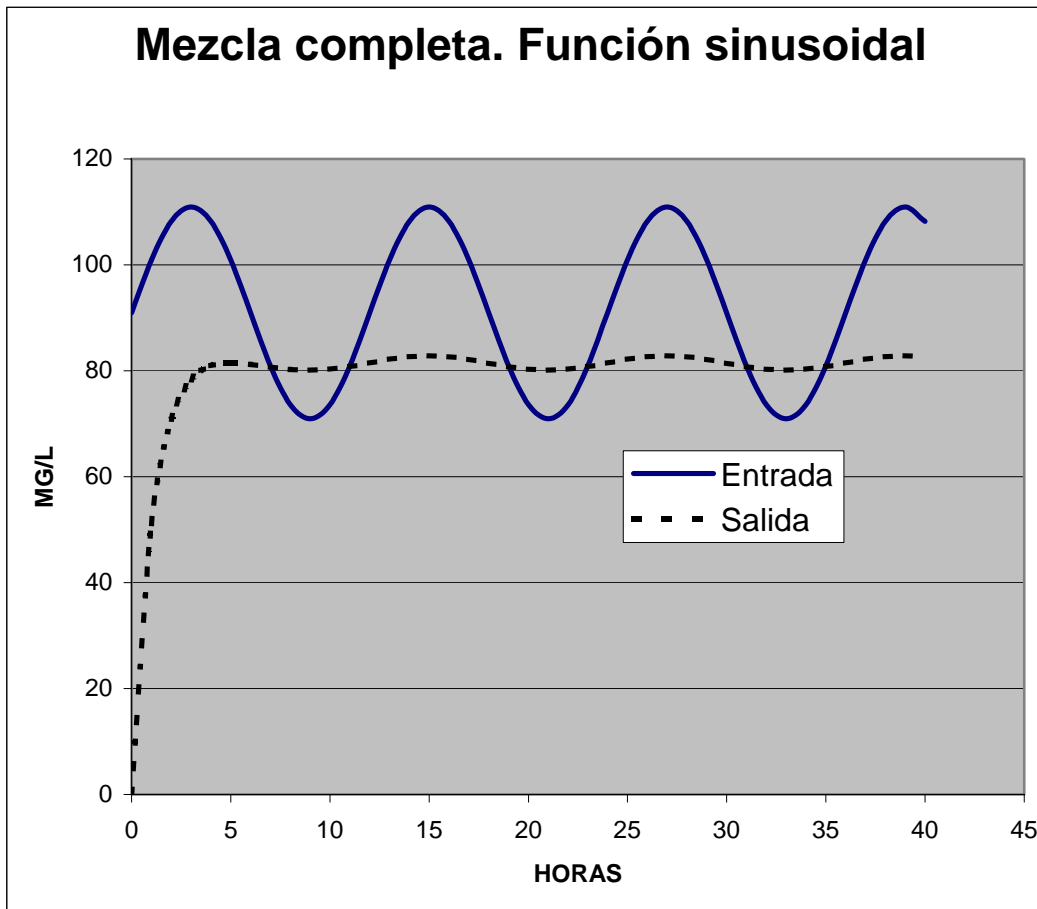
$$\arctg \frac{\omega}{\frac{1}{\theta} + K}$$

en términos de ángulo (radianes) o

$$\frac{T}{2\pi} \arctg \frac{\omega}{\frac{1}{\theta} + K}$$

en términos de tiempo.

A continuación se presenta un ejemplo de en que la concentración media en la entrada es de 90,91 mg/l , la concentración inicial en el reactor es de 0 mg/l, el período es de 12 horas, y el desfase entre la entrada y la salida resulta de 5,71 horas.



#### iv) Solución general para volumen constante

Ecuación:

$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q}{V} + K \right) C = \frac{W}{V}$$

$$C(t) = C_o e^{-\left(\frac{1}{\theta} + K\right)t} + e^{-\left(\frac{1}{\theta} + K\right)t} \int_0^t \frac{W(u)}{V} e^{\left(\frac{1}{\theta} + K\right)u} du$$

$$C(t) = C_o + C_w$$

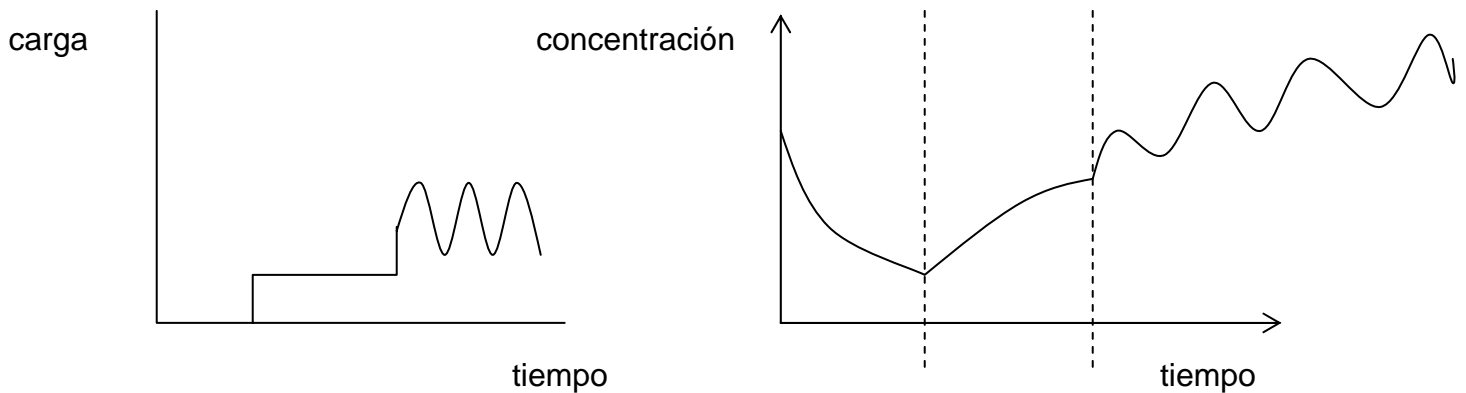
#### v) Principio de superposición

$$C(t) = C_o + C_w$$

Si  $W = W_1 + W_2$  entonces, por la aditividad de la integración

$$C(t) = C_o + C_{w1} + C_{w2}$$

Ejemplo:



#### vi) Reactor de volumen variable

Ecuación:

$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q}{V} + K \right) C = \frac{W}{V}$$

Solución general:

$$C(t) = e^{-P} \left( C_o + \int_0^t \frac{W}{V} e^P du \right)$$

en que

$$p = \int_0^t \left( \frac{1}{\theta} + K \right) du$$

Ejemplo, embalse que se llena

### vii) Resolución por diferencias finitas

Ecuación:

$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q}{V} + K \right) C = \frac{W}{V}$$

Esquema explícito

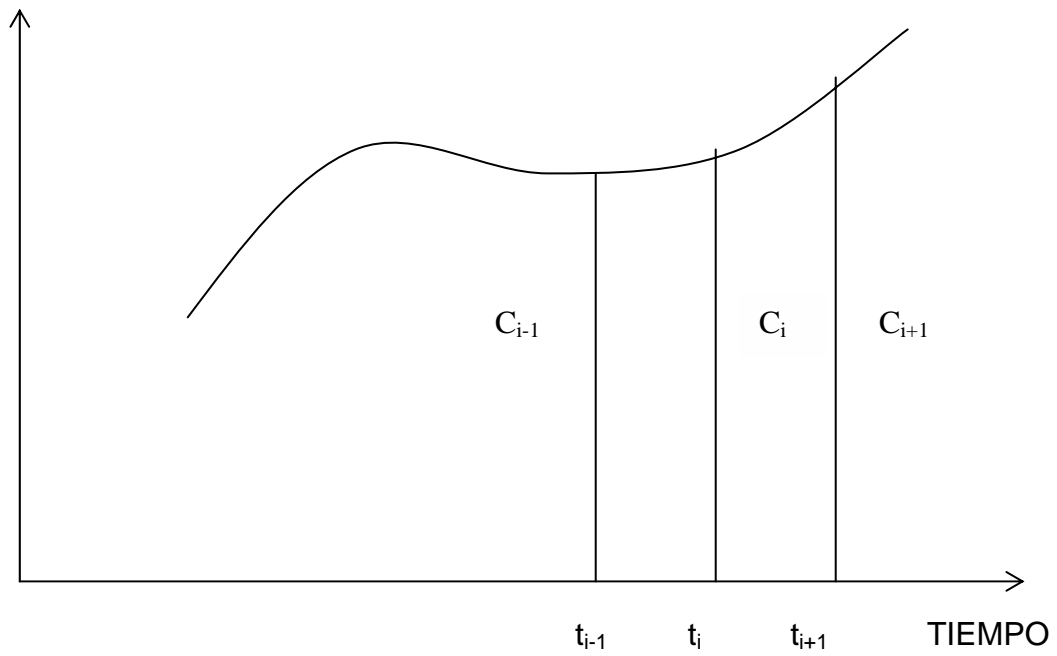
$$a) \quad \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta t} + \left( \frac{1}{\theta_i} + K \right) C_i = \frac{C_a}{\theta_i}$$

$$C_{i+1} = \left( \frac{C_a}{\theta_i} - \left( \frac{1}{\theta_i} + K \right) C_i \right) \Delta t + C_i$$

Esquema implícito

$$b) \quad \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta t} = \frac{C_a}{\theta_i} - \left( \frac{1}{\theta_i} + K \right) C_i$$





Sistema de ecuaciones incluye una ecuación por punto más dos ecuaciones de borde