

FIA2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2007-2

Unidad 3 - Sistemas extendidos

Por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

4 de agosto de 2007

Indice

3. Sistemas extendidos	3
3.1. Masas, centros de masas y momentum	3
3.2. La energía cinética de rotación en torno a un eje fijo	6
3.3. La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido	7
3.4. Producto vectorial y torques	9
3.4.1. El producto cruz	9
3.4.2. El torque de una fuerza	10

Lectura suplementaria

Se sugieren las siguientes secciones de los textos 'Tipler' y 'Serway' de física básica.

Física. Serway Tomo 1. McGraw Hill

- Capítulo 9
 - 9.6 Centro de masas
 - 9.7 Movimiento de un sistema de partículas
- Capítulo 10 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo 10.4 Energía cinética de rotación
 - 10.5 Cálculo de momentos de inercia
 - 10.6 Momento (torque) de una fuerza
- Capítulo 11 Movimiento de rodadura, mov angular y momento de una fuerza 11.2 Producto vectorial y momento de una fuerza

Física para la ciencia y la tecnología. Tipler. Reverte

- Capítulo 8: Sistemas de partículas y conservación del momento lineal
 - 8.1 Centro de masas
 - 8.3 Movimiento del centro de masas
 - 8.5 Energía cinética de un sistema
- Capítulo 9: Rotación
 - 9.2 momento de una fuerza, movimiento y 2da ley de Newton
 - 9.3 Momento de inercia
 - 9.5 Energía cinética de rotación

Unidad 3

Sistemas extendidos

Para estudiar la evolución de un sistema formado por muchas componentes nos valemos de las Leyes de Newton postuladas para objetos puntuales. Para ello se hace necesario definir *el sistema* a estudiar, vale decir, el conjunto de partículas (distinguibles y enumerables) que lo constituyen. Suponemos que las componentes del sistema pueden interactuar entre sí, y a su vez con el exterior.

En un intento de clasificación, los sistemas que tenemos en mente pueden ser

- i.- disgregados, tales como galaxias de estrellas, sistemas granulares, gases, etc.;
- ii.- líquidos, donde las moléculas constituyentes mantienen cohesión, pero permiten que dos moléculas en contacto puedan, luego de algún tiempo, estar muy distantes entre sí.
- iii.- medios elásticos, donde el conjunto de moléculas vecinas se mantiene pero sus y distancia de separación puede variar moderadamente ante deformaciones.
- iv.- sólidos indeformables, donde las distancias entre moléculas vecinas es invariable en el tiempo.

3.1. Masas, centros de masas y momentum

En un primer acercamiento al estudio de sistemas formados por muchos constituyentes nos focalizaremos en los sólidos indeformables. Un sólido lo visualizamos como un continuo de materia, como se ilustra en la Fig. (3.3a) para el caso de una barra. Esta barra la trozamos imaginariamente en celdas (3.3b), para terminar con las celdas independientes indicadas en (3.3c). Entre

celdas contiguas hay fuerzas de cohesión. Cada una de estas celdas, si son lo suficientemente pequeñas, puede ser emulada como una partícula (3.3d). Nuevamente, la interacción dominante ocurre entre partículas vecinas.

Masa del sistema: En los sistemas newtonianos la masa es una cantidad aditiva. Supongamos el sistema formado por N partículas o celdas infinitamente pequeñas. Si la celda i -ésima tiene una masa total m_i , con $i : 1 \rightarrow N$, entonces la masa del sistema viene dada por

$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$

Centro de masas: Supongamos el sistema se distribuye espacialmente de modo que la posición de la celda i se representa mediante el vector posición \vec{r}_i referido a un origen O de un sistema de referencia S arbitrario. Este sistema puede ser el laboratorio, el suelo, la tierra, la vía láctea, etc. Se define la posición del centro de masas \vec{R} del sistema por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i .$$

En coordenadas cartesianas, denotando

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} , \quad (3.1.1)$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} , \quad (3.1.2)$$

entonces,

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i , \quad (3.1.3)$$

$$R_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i , \quad (3.1.4)$$

$$R_z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i . \quad (3.1.5)$$

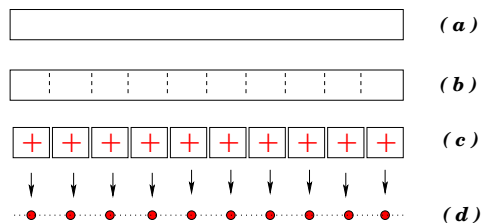
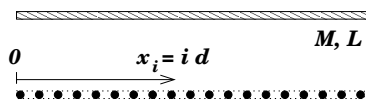


Figura 3.1: Representación de una barra como una colección de partículas.

El centro de masas de una barra:

Consideremos una barra de longitud L y de masa M distribuida uniformemente. A esta barra la dividimos en $n + 1$ trozos, los cuales se separan en una distancia $d = L/n$. La masa de cada trozo es $M/(n + 1)$, y la coordenada x de la i -ésima es $x_i = i d$. Entonces, la ubicación del centro de masas, según el eje x escogido longitudinalmente está dado por

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n m_i x_i = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n \frac{M}{n+1} \times \frac{iL}{n} = \frac{L}{2}$$

**La energía potencial gravitacional de un cuerpo:**

Consideremos un cuerpo de masa M constituido por N celdas en presencia de la gravedad terrestre g . La energía potencial gravitacional del sistema es la suma de la contribución de cada una. Así, si la celda i -ésima es de masa m_i y su coordenada con respecto al nivel cero de energía potencial es y_i , entonces la energía potencial total U_g es

$$U_g = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = M g \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} = M g Y_{CM} ,$$

donde claramente Y_{CM} representa la coordenada Y del centro de masas del sistema.

Momentum del sistema: Supongamos que el sistema de partículas evoluciona temporalmente, vale decir, sus constituyentes se mueven. Supongamos que la celda i -ésima tiene una velocidad \vec{v}_i , por lo tanto su momentum es $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. El *momentum total del sistema*, o simplemente el *momentum del sistema*, se denota por \vec{P} y se define como la suma de los momenta de sus componentes:

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Una propiedad muy importante es que el momentum \vec{P} de un sistema elemental o compuesto resulta igual al producto de su masa total M por la velocidad de su centro de masas \vec{V} .

En efecto, consideremos la definición de centro de masas y derivamos con respecto al tiempo para obtener su velocidad. Usando propiedades de las derivadas y considerando las masas m_i

no varían en el tiempo

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} = \frac{1}{M} \vec{P}.$$

Entonces

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (3.1.6)$$

3.2. La energía cinética de rotación en torno a un eje fijo

Consideremos un cuerpo sólido rotando con velocidad angular ω en torno a un eje fijo. La energía cinética es una cantidad aditiva, vale decir, si representamos el sistema como un conjunto de N celdas, cada una de masa m_i , con $i : 1 \rightarrow N$, entonces la energía cinética total del sistema está dado por

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Considerando que la celda i -ésima experimenta describe un trayecto de radio ρ_i con velocidad angular ω , entonces su rapidez es $\omega\rho_i$. Sustituyendo en la expresión para la energía cinética obtenemos

$$K = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \right]}_I \omega^2$$

Aquí hemos definido el *momento de inercia* del sólido en torno al eje de rotación, que denotamos por I :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2,$$

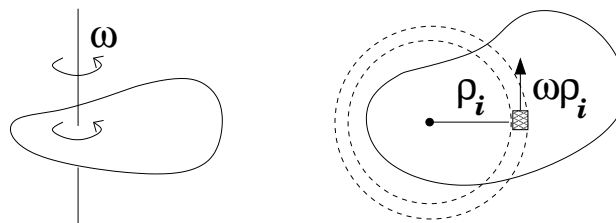
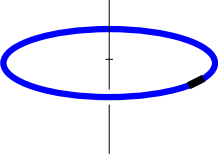


Figura 3.2: Un cuerpo plano rotando en torno a un eje fijo; a la derecha se ilustra una vista desde arriba.

con ρ_i la distancia al eje de la celda i -ésima, de masa m_i . Esta definición se extiende a cualquier sólido distribuido volumétricamente. Observamos que

- El momento de inercia depende del eje con respecto al cual se evalúa.
- El momento de inercia disminuye cuando la distribución de masas es muy próxima al eje.

El momento de inercia de un aro:
 Consideremos un aro de masa M y radio R . Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de este. Si discretizamos el aro en N segmentos, con N muy grande, entonces $\rho_i = R$, para todo i . Con ello

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = MR^2 .$$


3.3. La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

Hemos denotado por \vec{V} la velocidad del centro de masas de un sistema. Su tasa de variación por unidad de tiempo corresponde a la aceleración del centro de masas y la denotamos por \vec{a} . En algunos textos se usa la notación \vec{a}_{CM} . Entonces,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} .$$

El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las N componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema. Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas que ligan al sistema y del eventual cambio de geometría que este pueda experimentar.

Consideremos un sistema formado por N partículas interactuando entre ellas. El sistema no necesariamente es un sólido; puede tener cualquier constitución. Al analizar la i -ésima partícula, observamos que sobre ella puede actuar resultante externa que denotamos \vec{F}_i . También, sobre

la misma partícula i -ésima interactúan las restantes $N - 1$ partículas. Si denotamos $\vec{f}_{j/i}$ la fuerza que ejerce la componente j sobre la i , y convenimos (por simplicidad) en que $\vec{f}_{i/i} = 0$, entonces la fuerza neta de todas las componentes sobre la i -ésima es $\sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}$. La ecuación de movimiento de Newton para la partícula i es:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}. \quad (3.3.7)$$

La ecuación anterior corresponde a la de la partícula i , y por lo tanto resume un total de N ecuaciones. Si sumamos todas ellas:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}_{\vec{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}}_{\vec{0}}. \quad (3.3.8)$$

Aquí observamos

- que la suma de derivadas es igual a la derivada de la suma, por lo cual $\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$;
- que la resultante \vec{F} de las fuerzas externas es igual a la suma de todas ellas; y
- que la suma de todos los pares de fuerzas internas es nulo, en virtud al principio de acción y reacción ($\vec{f}_{i/j} = -\vec{f}_{j/i}$).

Con lo anterior

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\dot{\vec{V}} = M\vec{a}. \quad (3.3.9)$$

Esta ecuación resume el comportamiento del centro de masas de un sistema cualquiera cuando sobre este actúa una fuerza externa neta \vec{F} . El sistema necesariamente es rígido, de modo que sus deformaciones ni fuerzas internas afectan el movimiento de su centro de masas.

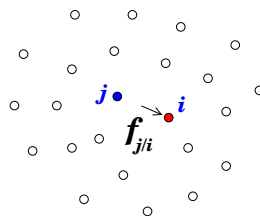


Figura 3.3: Un sistema de N cuerpos donde se muestra la fuerza ejercida por j sobre i .

3.4. Producto vectorial y torques

El uso de palancas para levantar cuerpos es un hecho empírico en el cual, mediante una combinación de fuerza, puntos de apoyo y lugares donde se aplica la fuerza, podemos levantar cuerpos que mediante levantamiento directo sería imposible. Este hecho es explicado mediante las ecuaciones de Newton, para lo cual requeriremos de una nueva construcción vectorial que llamaremos *producto cruz*.

3.4.1. El producto cruz

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores, entonces el elemento

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

es un vector cuya

- dirección es perpendicular a ambos, \vec{A} y \vec{B} ;
- tamaño $AB \sin(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} ; y
- sentido según la *regla de la mano derecha*¹.

Con esta definición surgen las siguientes propiedades:

1. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, para todo \vec{A} ;
2. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$;

¹En ella, ambos vectores se disponen con sus colas coincidentes. Luego, el dedo anular de la mano derecha toma la dirección y sentido de \vec{A} , con la palma orientada hacia \vec{B} . El sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ coincide con el del dedo pulgar.

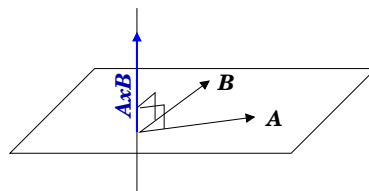


Figura 3.4: El vector $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular a \vec{A} y \vec{B} .

3. $\vec{A} \times (\lambda \vec{B}) = \lambda(\vec{A} \times \vec{B})$; con λ un escalar;
4. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; y $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$;
5. $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta = A_{\perp} B = AB_{\perp}$, donde A_{\perp} es la magnitud de la componente de \vec{A} , perpendicular a \vec{B} .
6. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$;

3.4.2. El torque de una fuerza

Se define el torque $\vec{\tau}$ de una fuerza \vec{F} aplicada en un punto P como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

donde *vecr* es el vector que une el origen O con el punto P . Físicamente, lo que este producto representa es la habilidad de la fuerza \vec{F} de inducir un giro del cuerpo en torno al origen O . Este origen es totalmente arbitrario; sin embargo, una vez es escogido, ha de mantenerse durante el desarrollo de las ecuaciones en cuestión.

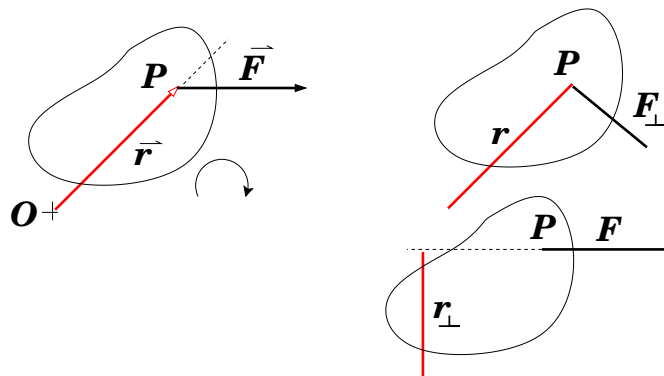


Figura 3.5: El torque con respecto a O debido a una fuerza \vec{F} aplicada en P .

El torque debido a la gravedad terrestre:

Un caso de interés es el torque sobre un sólido debido a la gravedad. Definiendo el torque total como la suma de todos los torques, el torque debido a la gravedad lo calculamos representando el sólido como una superposición de N celdas muy pequeñas, cada una de ellas afectada por el peso $\vec{w}_i = m_i \vec{g}$. El torque con respecto a un origen O resulta

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}_{M \vec{R}_{CM}} \right) \times \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times (M \vec{g}),$$

donde hemos identificado \vec{R}_{CM} , el vector centro de masas del sólido con respecto a O . Este resultado nos permitirá una notable simplicidad en el estudio de sólidos.