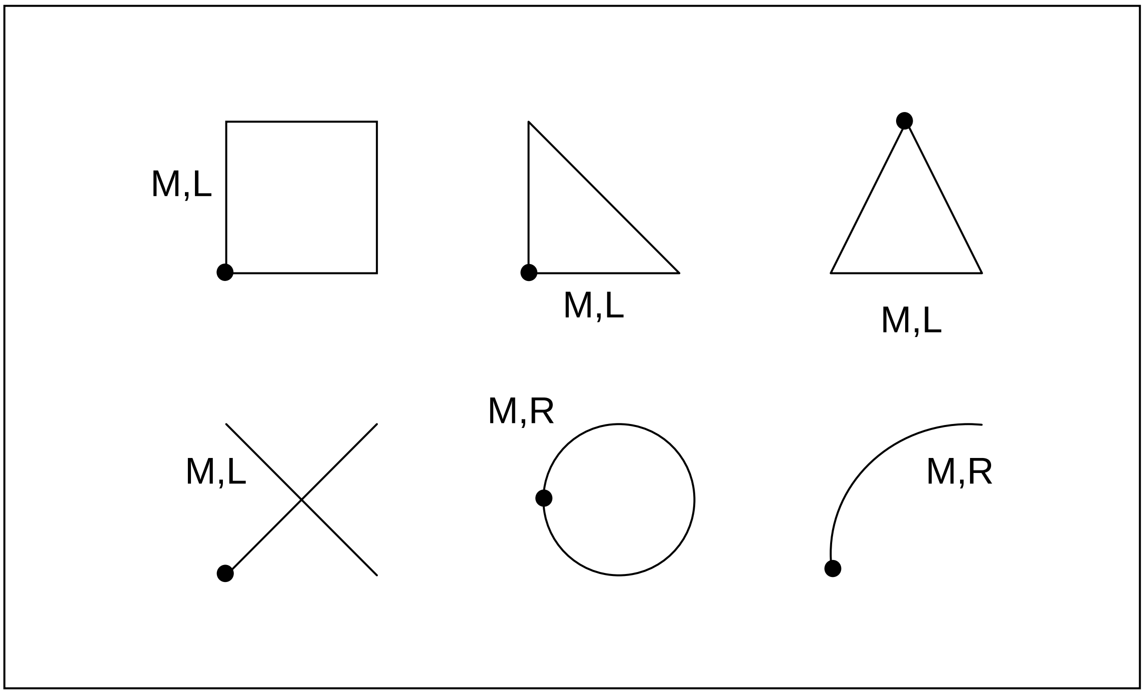
FIA2 – Sistemas Newtonianos
Semestre 2007-2

# Unidad 4B – Dinámica Plana I
# Energía de Sólidos Rígidos

*René D. Garreaud*
Departamento de Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

P1. Determine el momento de inercia de cada cuerpo en torno a un eje que pasa por el punto indicado por el círculo lleno.




P2. Problemas Adicionales en libro SERWAY:

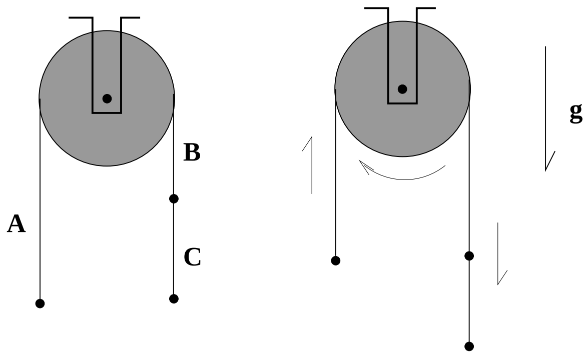
Sección 10.4 (Energía cinética de rotación): todos los problemas
Sección 10.8 (trabajo y energía cinética de rotación), problemas 32, 33, 34 y 36sección

PROBLEMA 3

**En la figura se muestra una rueda cilíndrica de masa $M$ y radio $R$ que puede girar sin fricción en torno a su eje fijo. Una cuerda ideal descansa sobre la superficie (rugosa) de la rueda. En el extremo derecho de la cuerda se adhiere una perla de masa $m$; en el otro lado se adhieren dos perlas de igual masa ($m$) separadas por una distancia $b$. El sistema se suelta del reposo con las perlas extremas al mismo nivel con respecto a la horizontal. A consecuencia de la asimetría de las cargas, la rueda rota en sentido de los punteros del reloj; la cuerda no resbala con respecto a la rueda.**

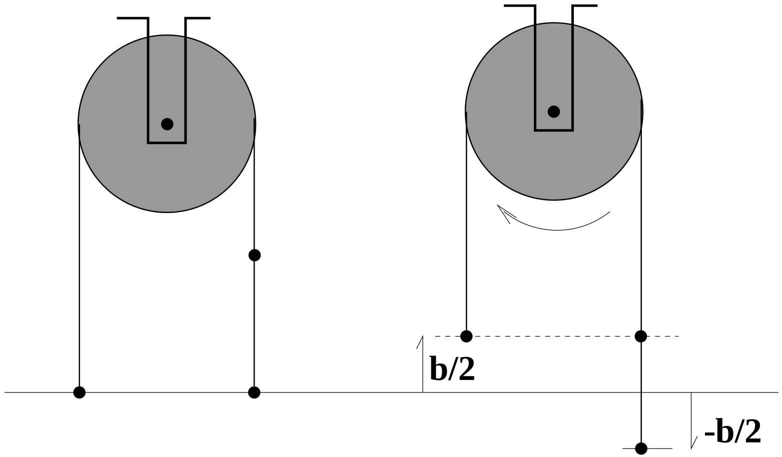
[redacted]

**B) Determine la velocidad angular de la rueda al instante en que las perlas que penden de $A$ y $B$ pasan por en el mismo nivel.**




**Resoulción del control: www.dfi.uchile.cl/docencia/2000a/10a-01**

**PARTE B:**




**Conservación de la energía { partícula1 + partícula2 + partícula3 + cilindro}:**

$$0+mgb+0+U_g(cil) = (\frac{1}{2}mv^2+\frac{mgb}{2})+(\frac{1}{2}mv^2+\frac{mgb}{2})+(\frac{1}{2}mv^2-\frac{mgb}{2})+\frac{1}{2}I\omega^2+U_g(cil)$$

- **Sin resbalar:** $v = \omega R \rightarrow$

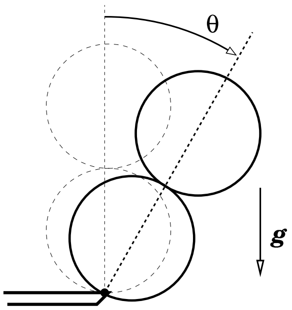
$$mgb = 3mv^2 + I\omega^2 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{mgb}{3mR^2 + MR^2/2}$$

PUNTUACION: 1Pto energías cinéticas correctas + 1Pto energías potenciales correctas + 1Pto despeje correcto.

**3** **Dos esferas macizas idénticas, cada una de masa $\underline{M}$ y radio $\underline{R}$, son adheridas firmemente entre sí. El conjunto puede rotar libremente en torno a un eje fijo tangente a uno de los polos del cuerpo, pivoteado en el canto horizontal de una mesa. Las esferas se disponen con su eje polar vertical y se les deja caer desde el reposo por efecto de la gravedad $\underline{g}$.**

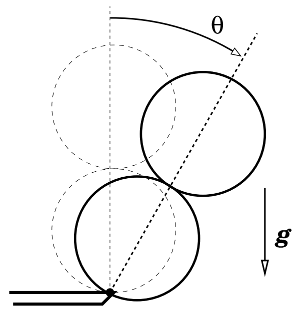
**• Determine la velocidad angular del cuerpo como función del ángulo de caída $\underline{\theta}$.**

**Nota: el momento de inercia con respecto a eje central de una esfera maciza es $2mr^2/5$.**




SOLUCION DEL CONTROL EN http://www.dfi.uchile.cl/hfa

PROBLEMA 3




• Las fuerzas sobre el sólido son su peso y la reacción en el soporte. Esta última no trabaja puesto que el soporte no se mueve. Podemos conservar energía mecánica: $\boldsymbol{E_i = E}$, con $\boldsymbol{E = K + U_g}$. El centro de masas del cuerpo se ubica en el contacto entre las dos esferas. Inicialmente, éste se ubica a una altura $\boldsymbol{2R}$ del pivote.

• Inicialmente

$$\boldsymbol{E_i \rightarrow \begin{cases} K = 0 \\ U = (2M)g(2R) \end{cases}} \tag{3}$$

• Luego de rotar un ángulo $\boldsymbol{\theta}$, el CM se ubica a una altura $\boldsymbol{2R\cos\theta}$ del pivote. Tenemos:

$$\boldsymbol{E \rightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{2} I_s \omega^2 \\ U = (2M)g(2R)\cos\theta \end{cases}} \tag{4}$$

• Falta calcular el momento de inercia de las dos esferas con respecto al eje que pasa por el pivote. Usando Steiner para cada esfera:

$$\boldsymbol{I_s = \left\{\frac{2}{5}MR^2 + MR^2\right\} + \left\{\frac{2}{5}MR^2 + M(3R)^2\right\} = \frac{4}{5}MR^2 + 10MR^2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_s = \frac{54}{5}MR^2}}$$

• Sustituyendo todos los términos en $\boldsymbol{(K + U_g)_i = (K + U_g)}$ tenemos:

$$\boldsymbol{0 + (2M)g(2R) = \frac{1}{2}I_s\omega^2 + (2M)g(2R)\cos\theta \qquad \Rightarrow}$$

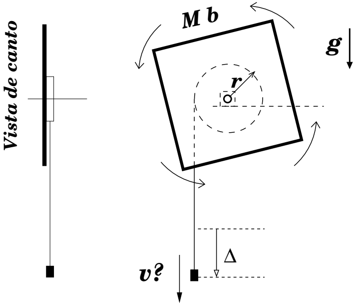
$$\boldsymbol{(1-\cos\theta)(2M)g(2R) = \frac{1}{2}\left(\frac{54}{5}\right)MR^2\omega^2 \qquad \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{20g}{27R}(1-\cos\theta)}}$$

PUNTUACION: $\boxed{\text{2Pt}}$ momento de inercia correcto + $\boxed{\text{2Pt}}$ conservación de energía + $\boxed{\text{2Pt}}$ obtención del resultado.
DESCUENTOS: -1Pt por error independiente; -1Pt por error dimensional.

**PROBLEMA 2:** Un marco cuadrado de masa $\underline{M}$ está formada por cuatro barras masivas idénticas de longitud $\underline{b}$. El marco lleva centrada una ranura circular de radio $\underline{r}$ la cual se mantiene firme a éste mediante un material rígido extremadamente liviano. El sistema puede rotar sin fricción en torno a un eje horizontal que pasa por su centro. Una carga de masa $\underline{m}$ cuelga del marco mediante un cordel enrollado en la ranura.

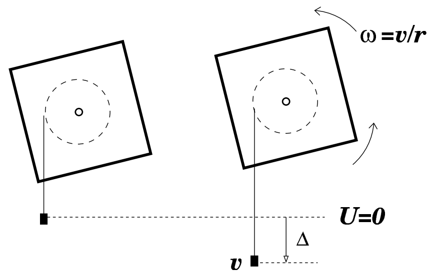
A) [5Pt] Determine la rapidez de caída de la carga luego que ésta a bajado una distancia $\underline{\Delta}$ partiendo del reposo.

B) [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso $M \ll m$.



$\boxed{\text{PROBLEMA 2}}$

<u>Resolución por energía</u>




• Considerando que las fuerzas externas no trabajan podemos decir:

$$E_f = E_i + W_{i\to f} \Rightarrow E_f = E_i$$

Para la energía en general escribimos:

$$E = K(\texttt{marco}) + K(\texttt{carga}) + U_g(\texttt{marco}) + U_g(\texttt{carga})$$

INICIAL (considerando nivel cero de $U_g$ la ubicación inicial de la carga):

$$E_i = 0 + 0 + U_g(\texttt{marco}) + 0$$

FINAL:

$$E_f = \frac{1}{2}I_\circ\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + U_g(\texttt{marco}) - mg\Delta$$

• Igualando e imponiendo $v = \omega r$ obtenemos:

$$0 = \frac{1}{2}I_\circ\frac{v^2}{r} + \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v^2 = \frac{2mg\Delta}{I_\circ/r^2 + m}}.$$

• Necesitamos $I_\circ$. Se trata de cuatro barras, cada una de masa M/4 y longitud b. El momento de inercia se necesita con respecto a un eje por el centro del marco. Usamos Steiner considerando que cada barra dista b/2 del eje central. Además el momento de inercia de una barra de masa m y longitud L con respecto a un eje por su centro de masas es $mL^2/12$. Entonces:

$$I_\circ = 4\times\left(\frac{1}{12}\left[\frac{M}{4}\right]b^2 + \frac{M}{4}(b/2)^2\right) = 4\times\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{16}\right)Mb^2 = (\frac{1}{12}+\frac{1}{4})Mb^2 = Mb^2/3$$

• Con esto,

$$\boxed{v^2 = \frac{2mg\Delta}{Mb^2/3r^2 + m} = \frac{2g\Delta}{Mb^2/3mr^2 + 1}}$$

• En el límite $M \ll m$, o bién $M/m \to 0$,

$$v^2 \to 2g\Delta$$

que corresponde a caída libre. Esto es de esperar pues en tal caso el marco, de masa casi nula, no ofrece resistencia a la caída de la carga.