FIA2 – Sistemas Newtonianos
Semestre 2007-2

Unidad 6B– Ondas Estacionarias y Modos normales

René D. Garreaud
Departamento de Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

0. Notación en este Apunte

Los escalares (masa, energía, etc.) se escriben en *cursiva*, tanto en mayúsculas como minúsculas (m, K, etc.), o empleando una letra de alfabeto Griego (ω, δ, etc). Las cantidades escalares se escriben en **negrita** (**F**, **dv**, etc). La multiplicación entre escalares se denota con un pequeño punto (·), el producto cruz por una cruz (×) y el producto punto por un asterisco (*).

1. Usted ya sabe….

Todos los cuerpos exhiben algún grado de flexibilidad en cuanto pueden experimentar pequeñas deformaciones, sean estas de tipo longitudinal (a lo largo del cuerpo) o transversal (normales al cuerpo). Estas perturbaciones, inicialmente forzadas por un agente externo, pueden viajar a través del medio dando lugar a ondas y pulsos.

Un caso simple, pero muy relevante, es una cuerda tensa dispuesta en forma horizontal. Supondremos el eje x alineado con la cuerda. En este caso la deformación $y(x,t)$ corresponde a los pequeños cambios de posición vertical de las "partícula" que forman la cuerda. Las "partículas" se refieren a un elemento infinitesimal de la cuerda entre x y $x+dx$. Al aplicar la 2da ley de Newton a un elemento infinitesimal de la cuerda, obtenemos la ecuación de onda:

$$\partial^2 y / \partial x^2 = (1/c^2)\cdot\partial^2 y / \partial t^2 \tag{1}$$

donde $c = (\tau/\rho)^{1/2}$, con τ = tensión de la cuerda y ρ = densidad lineal. Notar que c depende exclusivamente de las propiedades del medio y no de las condiciones iniciales o amplitud de las deformaciones.

En la clase anterior Ud. demostró que la función

$$y = f(x-c\cdot t) + g(x+c\cdot t) \tag{2}$$

satisface la ecuación de onda. Las funciones *f* y *g* representan la “forma” de una onda viajera o pulso que se desplaza a la derecha y a la izquierda, respectivamente, con una rapidez *c* (es por eso que el parámetro c se conoce como velocidad de fase).

2. Ondas armónicas

Supongamos que en $t = 0$ la cuerda se ha deformado en forma sinusoidal tal que:

$$y(x,0) = A\cdot \mathrm{sen}(2\cdot\pi\cdot x/\lambda) \tag{3}$$

A representa la amplitud máxima de las deformaciones. Los nodos de la cuerda ($y = 0$) en la condición inicial ocurren en todas las posiciones x que satisfacen $2\cdot\pi\cdot x/\lambda = n\cdot\pi$, es decir $x = n\cdot\lambda/2 = \{\ldots -2\cdot\lambda, -3\cdot\lambda/2, -\lambda, -\lambda/2, 0, \lambda/2, \lambda, 3\cdot\lambda/2, 2\cdot\lambda, \ldots\}$. El grafico de la figura 1 ilustra la forma de la cuerda en $t = 0$.

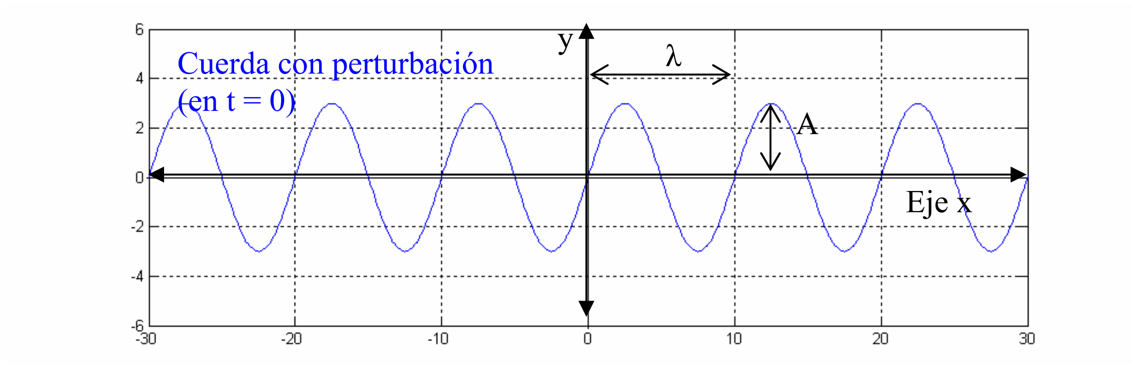

Figura 1. Geometría de una perturbación armónica en $t = 0$. La onda tiene $\lambda = 10$ y A=3

Notar que en $x=\lambda, 2\cdot\lambda, \ldots$la “forma” sinusoidal se reproduce nuevamente. Por esta razón λ se denomina longitud de onda.

Cuando $t > 0$ la onda comienza a avanzar, con velocidad de fase *c*, y supongamos que lo hace hacia la derecha. Combinando (2) y (3) obtenemos entonces:

$$y(x,t) = A\cdot \mathrm{sen}(2\cdot\pi/\lambda\cdot(x-c\cdot t)) \quad = A\cdot \mathrm{sen}(2\cdot\pi\cdot(x/\lambda - c\cdot t/\lambda)$$

$$y(x,t) = A\cdot \mathrm{sen}(2\cdot\pi\cdot(x/\lambda - t/T)) \tag{4}$$

donde hemos definido $T = \lambda/c$. Interpretemos ahora esta nuevo parámetro. Por simplicidad consideremos $x = 0$, de manera que (4) se reduce a $y(0,t) = A\cdot \mathrm{sen}(2\cdot \mathrm{pi}\cdot t/T)$ cuyo grafico se muestra en la figura 2. Claramente la partícula en $x = 0$ (y cualquier otra partícula) experimenta oscilaciones armónicas de amplitud *A* y período *T*. Entonces la ecuación (4) describe una onda armónica, de amplitud A y con longitud de onda λ y período T que viaja hacia la derecha.

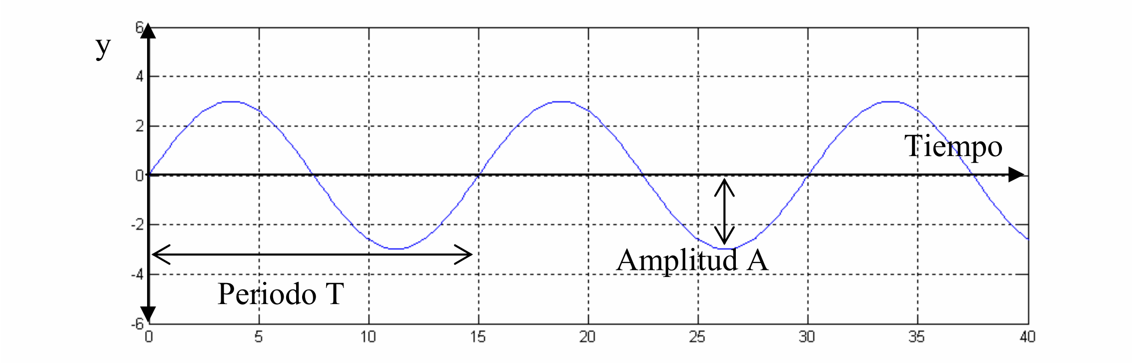

Fig. 2. Evolución temporal de la perturbación armónica en x = 0. (T = 15 y A=3)

Una forma más simplificada de escribir (4) es:

$$y(x,t) = A\cdot\text{sen}(k\cdot x - \omega\cdot t) \tag{5a}$$

donde $k = 2\cdot\pi/\lambda$ = numero de onda y $\omega = 2\cdot\pi/T$ = frecuencia angular (rad/s). Algunas veces se emplea la frecuencia f = 1/T (s^{-1} = Hertz = Hz). Las ecuaciones (4) y (5) suponen que $y(x = 0, t = 0) = 0$ lo cual no siempre es así. Una versión mas general de (4) se escribe como

$$y(x,t) = A\cdot\text{sen}(k\cdot x - \omega\cdot t - \Phi) \tag{5b}$$

donde Φ se denomina fase. Tanto la amplitud A como la fase Φ dependen de las condiciones iniciales, es decir las deformaciones impuestas a la cuerda en $t = 0$.

Las condiciones iniciales también pueden dictar el valor de λ (y entonces k) con lo cual el valor de T (y entonces ω) queda completamente definido pues:

$$\lambda/T = \omega/k = c = (\tau/\rho)^{1/2}$$

(Alternativamente, la condición inicial puede dictar el valor de T lo cual fija el valor de λ). Las relaciones anteriores indican que la longitud de onda (o número de onda) NO es independiente del período (o frecuencia) cumpliéndose que:

- Ondas largas (# de onda pequeño) son ondas de período largo (baja frecuencia)
- Ondas cortas (# de onda grande) son ondas de período corto (alta frecuencia)

3. Ondas en una cuerda finita

Hasta ahora hemos considerado que la cuerda tiene un largo infinito: $-\infty \leq x \leq +\infty$. Veamos ahora que pasa cuando la cuerda es finita tal que $-\infty \leq x \leq 0$. La condición de borde en $x = 0$ puede ser de dos tipos:

- Extremo fijo (o empotrado): $y(0,\mathrm{t}) = 0\ \forall t$
- Extremo móvil: $\partial\, y(0,t)\ /\ \partial t = 0\ \forall t$

3.1 Extremo fijo

Supongamos que un pulso u onda se acerca desde la izquierda hacia el punto de empotramiento y definamos $t = 0$ cuando la perturbación alcanza $x = 0$. Entonces:

$y_{\mathrm{D}}(x,t) = f(x-c\cdot t)$ para $t < 0,\ x \leq 0$

¿Que pasa cuando $t > 0$? Para responder esta pregunta emplearemos el principio de superposición y supongamos que la cuerda se extiende hacia el infinito también a la derecha de $x = 0$. Imaginemos que en el lado "imaginario" de la cuerda viaja una perturbación idéntica a la real pero invertida y moviéndose hacia la izquierda:

$y_{\mathrm{I}}(x,t) = -f(x+c\cdot t)$ para $t < 0,\ x \geq 0$

Entonces, la solución completa esta dada por:

$y(x,t) = f(x-c\cdot t) - f(x+c\cdot t)$ para $\forall t$ y $\forall x$

La formula anterior satisface la condición de empotramiento y predice además que pasa para t > 0: en este caso la perturbación se refleja en $x = 0$ (es decir comienza a avanzar hacia la izquierda) invirtiendo su forma pero manteniendo todos los demás parámetros (Figura 3a).

3.2 Extremo móvil

En este caso, la "partícula" en $x = 0$ puede cambiar su posición pero la tangente a la cuerda siempre se mantiene horizontal. Si esta condición no se satisface actuaría una fuerza transversal finita lo que generaría aceleraciones infinitamente grandes. La condición de borde en este caso es: $\partial\, y(0,t)\ /\ \partial t = 0\ \forall t$. Por analogía con el caso anterior se puede demostrar que esta CB es satisfecha por:

$y(x,t) = f(x-c\cdot t) + f(x+c\cdot t)$ para $\forall t$ y $\forall x$

La ecuación anterior indica que nuevamente una perturbación viajera se refleja en $x = 0$ pero esta vez comienza a “retroceder” manteniendo su forma completamente (Fig. 3b).

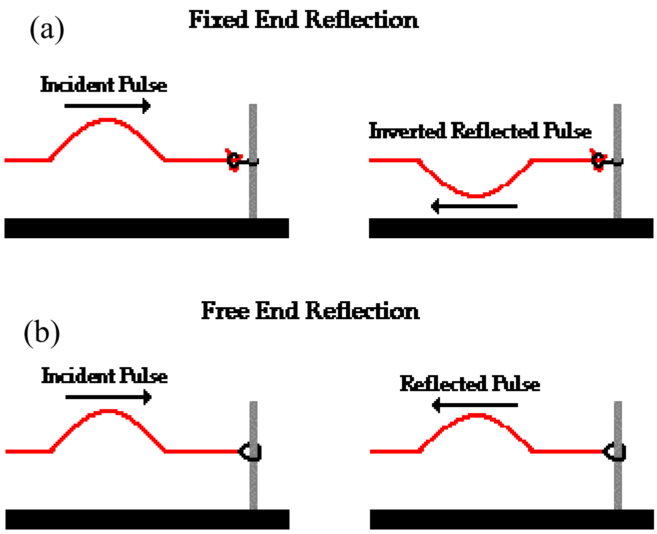

Figura 3. Reflejo de un pulso en un extremo (a) empotrado y (b) libre.

4. Ondas estacionarias

Supongamos que se generan ondas armónicas en una cuerda finita empotrada en uno de sus extremos. De acuerdo a la solución general vista en 3.1, en este caso la solución esta dada por $y(x,t) = A\cdot\text{sen}(k\cdot x-\omega\cdot t) - A\cdot\text{sen}(k\cdot x+\omega\cdot t)$. Aplicando los teoremas de trigonometría es fácil demostrar que:

$$y(x,t) = 2\cdot A\cdot\text{sen}(\omega\cdot t)\cdot\text{sen}(k\cdot x) \qquad (6)$$

La ecuación (6) fue deducida de la superposición (suma) de dos ondas viajeras, pero es una onda estacionaria! (no aparece el termino del tipo x-$c\cdot t$). Esta onda estacionaria tiene numero de onda (y λ) igual que las onda original (sen($k\cdot x$)) y oscila en el tiempo al igual que la original (ω o T no cambian). Los valores k y ω aun satisfacen $\omega/k = c$. La forma de esta onda se muestra en la figura (4).

Notemos que en los nodos (separados cada $\lambda/2$) la amplitud es 0 mientras que en los antinodos (también separados por λ /2) la amplitud es el doble de la original ($2\cdot A$).

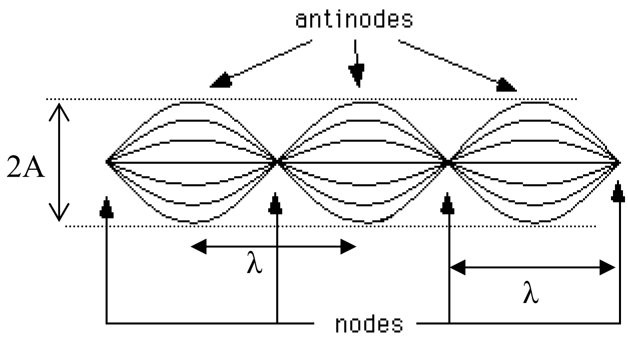

Figura 4. Geometría de onda estacionaria

5. Modos normales en una cuerda finita

5.1 Ambos extremos fijos

Supongamos ahora que la cuerda esta empotrada en ambos extremos y tiene largo L. Ya no es posible tener valores arbitrarios de k (u ω) pues los extremos de la cuerda deben ser nodos: $y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0\ \forall t$. La ecuación (6) cumple la primera condición en forma trivial, pero la segunda requiere

$$\mathrm{sen}(k\cdot L) = 0 \rightarrow k\cdot L = n\cdot \pi \rightarrow k = n\cdot \pi /L \rightarrow \lambda_n = 2\cdot L/n \quad \text{con } n = \{1, 2, 3, ...\}$$

Además, como $c = \lambda/T = \lambda\cdot f \qquad \rightarrow f_n = n\cdot c/(2\cdot L)$

Los pares [λ_n , f_n] definen los modos normales de la cuerda. A medida que n aumenta, disminuye el largo de la onda y aumenta su frecuencia (Fig. 6).

5.2 Un extremo fijo y el otro libre

Se deja propuesto demostrar que en este caso:

$\lambda_n = 4\cdot L/(2\cdot n-1)$ y $f_n = n\cdot c/(4\cdot L)$

5.3 Ambos extremos libres

Se deja propuesto demostrar que en este caso:

$\lambda_n = 2\cdot L/n$ y $f_n = n\cdot c/(2\cdot L)$

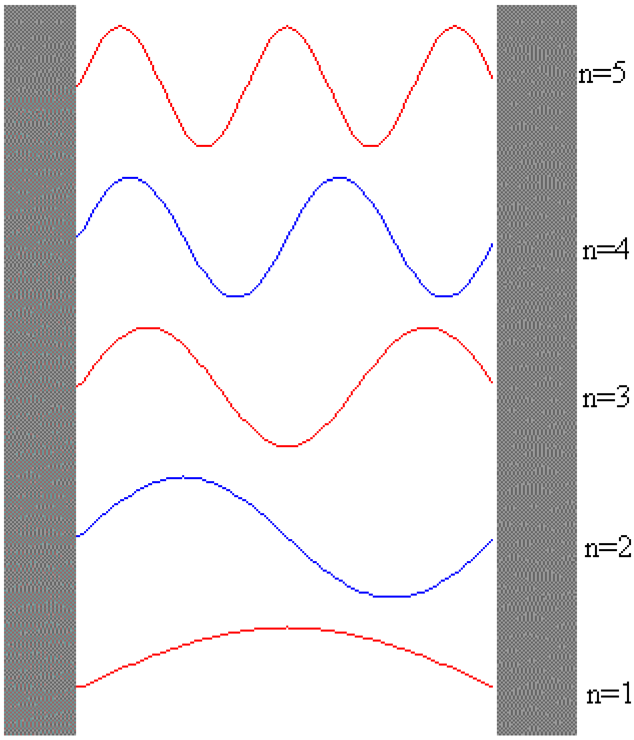

Figura 6. Modos normales en una cuerda con sus dos extremos fijos.