Sistemas Newtonianos - FI1A2
Guía N^o 1 — Métodos Numéricos
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile Prof. Rodrigo Soto

[P1] Considere una partícula que se deja caer verticalmente desde el reposo a una altura H y que sufre roce con el aire de la forma $F_{\text{roce}} = -\gamma v$.
Se busca comparar el tiempo que tarda en caer y la velocidad con la que golpea al suelo con los valores que se obtienen en ausencia de roce: $\sqrt{2H/g}$ y $\sqrt{2gH}$, respectivamente.
Para eso, resuelva numéricamente la ecuación de Newton que resulta con los parámetros $m = 1kg$ y $H = 10m$ con $\gamma = 0$; 0.1 kg/s; 0.2 kg/s; $\ldots$; 0.5 kg/s.
Grafique el tiempo de caida y la velocidad con que llega al suelo en función de γ.

[P2] Se desea determinar la altura máxima a la que llega un proyectil cuando es lanzado verticalmente con velocidad V_0 en presencia de roce viscoso, tal como el descrito en el problema anterior.
Busque un método numérico que permita determinar la altura máxima.
Resuelva para $m =$0.1 kg, V_0=1 m/s y $\gamma =$0.1 kg/s. Compare con la predicción sin roce $H = V_0^2/2g$.

[P3] Se desea resolver el movimiento de la Tierra en torno al Sol. Se sabe que en ese caso la fuerza es la de gravitación universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Con el fin de poder tratarla numéricamente, la fuerza se reescribe de la siguiente manera (considerando el movimiento en el plano $x-y$)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \\
&= -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})
\end{aligned}$$

Luego, la ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ se escribe por componentes como

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y \tag{2}$$

Use el método de Verlet visto en clases para resolver estas ecuaciones acopladas. Considere los siguientes valores de las constantes: $G = 1$ y $M = 1$. Además considere como condición inicial para la posición $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$ y para la velocidad $v_{x0} = 0$, v_{y0}=0.5, 1.0 y 2.0.
Grafique la trayectoria que resulta ($\texttt{plot}(\texttt{x},\texttt{y})$). Compare con los cálculos analíticos que predicen, para los datos del problema, que la velocidad para una órbita circular es $V_{\rm circ} = \sqrt{GM/R} = 1$.

[P4] La deducción de métodos numéricos no siempre es simple y a veces algunos métodos pueden resultar inestables. Un ejemplo clásico es el de la ecuación que describe como decrece la velocidad de un cuerpo en presencia de roce viscoso:

$$m\dot{v} = -\gamma v$$

Sustituyendo se puede mostrar que la solución es

$$v(t) = v(0)\exp(-\gamma t/m)$$

es decir, decae en el tiempo.
Una discretización centrada que en principio parece precisa es

$$\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t} = -\frac{\gamma}{m} v_i$$

Muestre que si resuelve para $m = 1$, $\gamma = 0{,}1$, $\Delta t = 0{,}1$, $T_{\rm final} = 100$ y $V(0) = 1$ el resultado no tiene sentido.
Sin embargo, se puede escribir otra discretización centrada, en que el lado derecho se promedia en dos instantes

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = -\frac{\gamma}{m}\frac{v_{i+1} + v_i}{2}$$

de la cual se puede despejar v_{i+1} como

$$v_{i+1} = \left(\frac{1 - \gamma\Delta t/2m}{1 + \gamma\Delta t/2m}\right) v_i$$

muestre que esta discretización es estable y entrega resultados sensatos.

[P5] Considere el movimiento de una partícula de masa m unida a un resorte de constante k, descrita por la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -kx$$

Resuelva la ecuación de movimiento, es decir calcule $x(t)$, usando el método de Verlet para el siguiente conjunto de valores: $m = 1kg$, $k = 1N/m$, $x_0 = 3m$ y $v_0 = 0$.
Una vez que tenga la solución de la ecuación, estudie si numéricamente la energía mecánica se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para eso escriba de alguna manera discreta la velocidad y evalue la energía en función del tiempo. ¿Es constante?