FIA2 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Semestre 2007-2

Unidad 6A - Ondas meánicas: descripción y modos propagativos

Por: Rodrigo Soto

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

19 de octubre de 2007

Indice

1. Intruducción a las ondas

NOTA: Esta introducción es necesariamente incompleta. Una más acabada la encontararán en los libros de texto *Tipler y Mosca* o *Serway*. La lectura de este material y de las partes introductorias de los textos mencionados será evaluada en el Control de Lectura.

Las ondas son un fenómeno genérico en física, manifestándose en muchos sistemas diversos. Así se habla de ondas sonoras, ondas en la superficie del agua, ondas electromagnéticas (luz, radio), ondas en mebranas (tambores), ondas en cuerdas, ondas sísmicas, etc.

Vamos a ir viendo que todas estas ondas presentan propiedades muy similares y tienen una descripción matemática análoga. En este curso veremos las ondas que tienen caracterísicas newtonianas, es decir, cuya dinámica está dada por la ley de Newton y que se propagan en una dimensión. Más adelante en la carrera verán otros tipos de ondas:

Tipo de onda	Curso
Sonido	Termodinámica
Electromagnéticas	Electromagnetismo
Ondas en membranas	Vibraciones y ondas
Ondas en agua	Vubraciones y ondas
Ondas sísmicas	Cursos de especialidad de Física, Geofísica o Civil

1.1. Fenomenología básica

Recordamos que las oscilaciones armómicas (amortiguadas o no) ocurren en sistemas que son pertubados cuando están cerca de un punto de equilibrio. Así, hay una fuerza que tiende a llevar al sistema de vuelta al equilibrio, pero la inercia (masa) hace que primero le tome un tiempo llegar al punto de equilibrio pero además que se *pase de largo*, haciendo que lleve a cabo un movimiento oscilatorio.

Las ondas aparecen por un mecanismo similar pero a diferencia de la las oscilacioes, las ondas se manifiestan sobre *cuerpos continuos* que pueden ser deformados. Es decir, ya no es una partícula puntual o un sólido ríguido que cuelga de un péndulo, sino que es toda una cuerda, por ejemplo, la que puede ser deformada (sacada del equilibrio) punto a punto.

Así una cuerda tensa entre sus extremos tiende a estar recta. Si es deformada, cambiándole la forma, tratará de volver a su forma original, generando un movimiento que llamaremos *ondulatorio*.

Cuando uno tiene una cuerda tensa, una membrana de tambor o la superficie del agua se observa que dependiendo de cómo se deforme el sistema se presentan los siguientes fenómenos:

Oscilación colectiva En una cuerda de guitarra, se observa que toda la cuerda oscila colectivamente de arriba a abajo con una amplitud que depende de la posición. A este tipo de movimientos se le llama *modos normales* y serán vistos en la Unidad 6B.

Propagación de pulsos En la superficie del agua, si se genera una pertubación localizada, ésta se propaga casi sin deformación hacia afuera. De igual manera si en una cuerda larga (o una manguera para regar, por ejemplo) se hace un pulso, este se propaga hasta el otro extremo casi sin deformación. Las ondas de radio también correponden a este fenómeno. Este es el fenómeno que estudiaremos en esta Unidad.

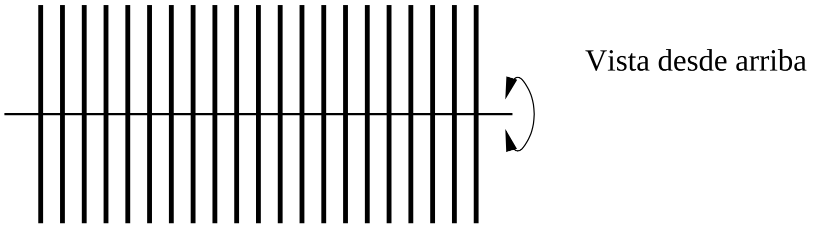
Vamos a ver que los dos tipos de fenómenos se describen de manera unificada como *fenómenos ondulatorios*.

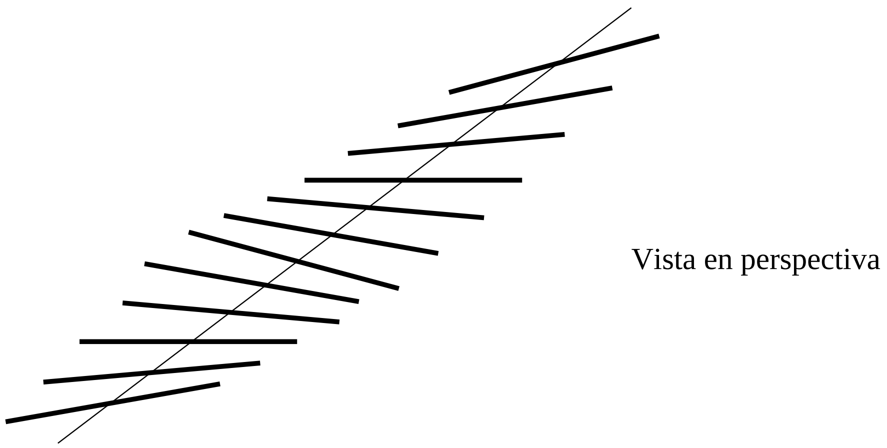
2. Descripción matemática de las ondas

Para tener una onda lo primero que se necesita es un medio continuo que pueda estar en equilibrio y que este medio pueda ser deformado de alguna forma. Para ver cómo se describen las ondas vamos a considerar un ejemplo sencillo que veremos en el Laboratorio.

2.1. Ondas de torsión en un arreglo de varillas

Consideremos el sistema de la figura, en el cual se tienen varillas de masa m, largo L y momento de inercia I que están soldadas por su centro a un hilo metálico que se mantiene horizontal.





Tal como se ve en la figura, las varillas pueden girar en torno a su centro, pero como están soldadas al hilo, eso tuerce el hilo, lo que provoca un torque a las varillas vecinas.

Rotulemos con $i = 1, \ldots, N$ las varillas y sea θ_i el ángulo que forma la varilla i-ésima con la horizontal. Calculemos el torque sobre esta varilla. Si la varrila que le se sigue (la $i+1$) tiene el mismo ángulo que ésta, el hilo no está torcido y el torque es nulo; si el la varilla forma un ángulo mayor con la horizontal ($\theta_{i+1} > \theta_i$) entonces el hilo está torcido y le hace un torque a la varilla i-ésima que tiende a hacer que θ_i crezca para que los dos ángulos sean iguales, es decir un torque positivo (noten que por acción y reacción el torque que i le hará a $i+1$ es negativo); finalmente si $\theta_{i+1} < \theta_i$ el torque será negativo. Considerando que las diferencias de ángulos no son muy grandes, se puede considerar entonces como una buena aproximación que el torque sobre i debido a $i+1$ será proporcional a la diferencia de ángulos

$$\tau_{i\,\mathrm{debido\,a}\,i+1} = T(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

donde T es una constante que habrá que medir y que depende de las propiedades del hilo.

De igual manera se puede calcular el torque sobre la varilla i debido a la anterior (la $i-1$), resultando $\tau_{i\,\mathrm{debido\,a}\,i-1} = T(\theta_{i-1} - \theta_i)$

Sumando los dos resultados se tiene el torque total sobre la varilla i

$$\tau_i = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$$

Por otro lado, sabemos que el movimiento de las varillas está dada por la ley de Newton para sólidos rígidos con un punto fijo (donde están soldadas al hilo)

$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = \tau_i \tag{1}$$

$$I\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \tag{2}$$

Se obtienen N ecuaciones de movimiento que están acopladas (pues la i depende de $i+1$ e $i-1$) lo cual hace muy difícil su análisis. Sin embargo, el problema se simplifica si hacemos la llamada *aproximación continua* que ya la hemos visto antes en el curso. Consiste en suponer que el conjunto de varillas es una forma de modelar un cuerpo continuo. Llamemos Δ a la diferencia de posición entre una varilla y la siguiente y supongamos que Δ es pequeño. En ese caso, en vez de rotular de manera discreta a las varillas podemos pasar a una descripción continua (es el paso opuesto al hecho en la primera Unidad). Así, la varilla i se encuentra en $x = i\Delta$ y podemos llamar $\theta(x)$ al ángulo de la varilla que está en la posición x.

Notamos que el lado derecho de la ecuación de movimiento se puede escribir de una manera simplificada pues recordamos que es la forma que tiene la segunda derivada discreta. En efecto

$$T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) = T\Delta^2\left(\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta^2}\right) \tag{3}$$

$$= T\Delta^2\left(\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}\right) \tag{4}$$

Y la ecuación de movimiento queda

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = T\Delta^2\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{5}$$

que se puede escribir como

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\theta}{dx^2}} \tag{6}$$

donde se ha definido por comodidad

$$c = \sqrt{T\Delta^2/I} \tag{7}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de ondas* y se debe entender que es para el ángulo θ que depende tanto de x como de t. Es decir, $\theta(x,t)$.

La ecuación (5) se puede entender como una ecuación de Newton, donde a la izquierda está la inercia y a la derecha las fuerzas. Si la colección de varillas tiene una gran variación de ángulos ($d^2\theta/dx^2$ grande) entonces habrá una fuerza mayor que provocará una mayor aceleración en cada punto.

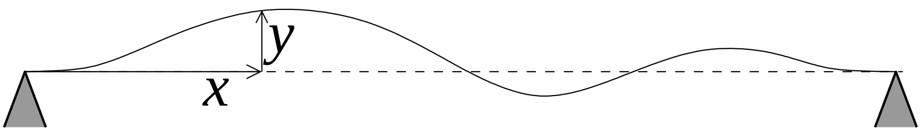
Por último calculemos la dimensión de c. T es un torque, Δ una distancia e I un momento de inercia, luego

$$\begin{aligned}
[c] &= \sqrt{\frac{[T][\Delta]^2}{[I]}} && (8)\\
&= \sqrt{\frac{(LMLT^{-2})\,(L^2)}{ML^2}} && (9)\\
&= \sqrt{L^2T^{-2}} && (10)\\
&= LT^{-1} && (11)
\end{aligned}$$

es decir, tiene dimensiones de velocidad.

2.2. La cuerda

Un segundo ejemplo de ondas en una dimensión se puede obtener del análisis del movimiento de una cuerda que está atada en sus extremos y que se mantiene tensa, con tensión T. La cuerda tiene una masa M y largo L, de la que se obtiene una densidad de masa lineal $\rho = M/L$.

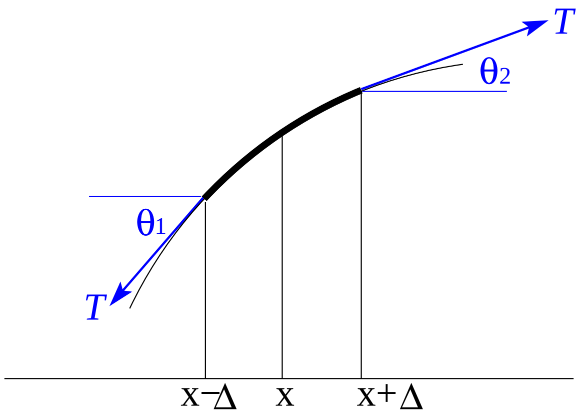


La cuerda es levemente extensible y se puede deformar verticalmente (se dice que se deforma transversalemente a la dirección en la que está estirada).

Para describir la dinámica de la cuerda, estudiemos lo que pasa en una vecindad de un punto x de la cuerda. Llamaremos $y(x, y)$ la deformación vertical de la cuerda en el punto x en el instante t, de igual manera como llamabamos $\theta(x, t)$ a la torsión de la varilla en un punto x en el instante t.

Consideremos un trozo de cuerda que está entre $x - \Delta$ y $x + \Delta$. Al hacer el DCL de ese trozo, las fuerzas que aparecen son las tensiones a ambos lados. Si llamamos θ_1 al ángulo que forma la tangente a la cuerda en $x - \Delta$ y θ_2 al ángulo que forma la tangente a la cuerda en $x + \Delta$, la fuerza total sobre ese trozo es

$$\vec{F} = T(-\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{y}) + T(\cos\theta_2\hat{x} + \sin\theta_2\hat{y}) \tag{12}$$



La figura muestra una cuerda muy deformada, pero vamos a considerar el caso en que la deformación es pequeña. Eso se caracteriza porque vamos a suponer que los ángulos que forma la tangente a la cuerda con la horizontal son siempre pequeños ($\theta \ll 1$). Si no se cumple esta hipótesis debemos hacer un análisis mucho más complejo.

Si los ángulos son pequeños, entonces, la fuerza se simplifica pues $\cos\theta \approx 1$ y $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$,

$$\vec{F} = T(-\tan\theta_1 + \tan\theta_2)\hat{y} \tag{13}$$

pero $\tan\theta$ es, de acuerdo a lo aprendido en Cálculo, la derivida de la función en el punto respectivo. Es decir

$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}(x - \Delta) \tag{14}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{dy}{dx}(x + \Delta) \tag{15}$$

Luego, la fuerza es

$$\vec{F} = T\left(\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)\right)\hat{y} \tag{16}$$

Por otro lado, la ley de Newton, dice que la fuerza es masa por aceleración. La masa de ese trozo de cuerda es la densidad por el largo que es 2Δ. Luego la masa es $m = 2\Delta\rho$. Como el movimiento es puramente vertical, la aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} \tag{17}$$

Combinando todo, se encuentra que la ecuación para el trozo de cuerda es

$$2\Delta\rho\frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} = T\left(\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)\right)\hat{y} \tag{18}$$

Simplificando el vector unitario y dividiendo por 2Δ se tiene

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2} = T\left(\frac{\frac{dy}{dx}(x+\Delta) - \frac{dy}{dx}(x-\Delta)}{2\Delta}\right) \tag{19}$$

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2} = T\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{20}$$

donde en el último paso se hizo tender Δ a cero.

Esta ecuación tiene la misma forma que la encontrada para el caso de las varillas en torsión, con la diferencia que la densidad de masa juega el rol de la inercia y la tensión de la cuerda la fuerza que restituye.

Nuevamente, si definimos

$$c = \sqrt{T/\rho} \tag{21}$$

se obtiene la ecuación de ondas

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{22}$$

Verifique que nuevamente c tiene dimensiones de velocidad

La ecuación de ondas para la cuerda dice que la aceleración es proporcional a la segunda derivada de y respecto a x. Notemos que esto es consistente pues si la cuerda es simplemente levantada desde un extremo, la deformación y está dada por una línea recta $y = (\tan\alpha)x$, donde α es el ángulo en que se levantó. Sabemos que la segunda derivada de una línea recta es nula, dando lugar a que la aceleración es nula, tal como efectivamente se observa. Una guitarra no suena sola cuando es inclinada!

3. Análisis de la ecuación: Solución de D' Alembert

El análisis general de la ecuación de ondas no es simple y en esta Unidad nos concentraremos en lo que se llama ondas propagantes.

En general la ecuación de ondas tiene la forma

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \tag{23}$$

donde $u(x,t)$ es una variable que describe la deformación relevante en el medio.

Vamos a buscar un tipo de soluciones que se llama de D' Alembert o propagantes. Imaginemos que tenemos una función $f(x)$ cualquiera (con todas las buenas propiedades de cálculo para poder calcular las derivadas que sean necesarias). A partir de esta función definimos la función

$$u(x,t) = f(x - ct) \tag{24}$$

Calculemos las derivadas temporales y espaciales de u. Las derivadas espaciales son directas y se calculan como

$$\frac{du}{dx} = f'(x - ct) \tag{25}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f''(x - ct) \tag{26}$$

donde f' y f'' son la primera y segunda derivada de f respecto a su argumento. Para calcular las derivadas de u respecto al tiempo hay que usar la regla de la cadena pues se debe derivar el argumento $(x - ct)$ respecto a t. El resultado es

$$\frac{du}{dt} = (-c)f'(x - ct) \tag{27}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = (-c)^2 f''(x - ct) = c^2 f''(x - ct) \tag{28}$$

Notamos que si reemplazamos estas derivadas en la ecuación de onda, se produce una cancelación a ambos lados para cualquier f.

Luego, hemos encontrando una solución de la ecuación de ondas.

$$u(x,t) = f(x - ct) \tag{29}$$

De manera análoga se puede mostrar (queda de tarea) que si $g(x)$ es una función cualquiera entonces

$$u(x,t) = g(x + ct) \tag{30}$$

también es solución.

Por último, una combinación cualquiera

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{31}$$

es solución (verificar!).

El análisis de estas soluciones y su discusión se verá en la clase y en la práctica de laboratorio.