

## Integración numérica de ecuación de movimiento

En esta sección se presenta en forma breve el método de Verlet para integrar algunas ecuaciones del tipo “segunda derivada de variable  $\beta$ ” es igual a una función de  $\beta$  y no aparecen primeras derivadas de  $\beta$ . Este algoritmo es extraordinariamente confiable si se lo usa correctamente.

Se ilustra el método para un caso bidimensional (es decir  $\beta$  tiene dos componentes) en que la ecuación es de la forma

$$\ddot{\vec{\beta}} = \vec{A}(\vec{\beta}, t) \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{pmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\beta_1, \beta_2, t) \\ A_2(\beta_1, \beta_2, t) \end{pmatrix}$$

Si se desea integrar entre  $t = 0$  y  $t = t_1$ , se troza este intervalo en  $N$  partes iguales  $\varepsilon = \frac{t_1}{N}$ , a  $\beta_1(t = n\varepsilon)$  se le designa  $\beta_{1n}$  y lo mismo con  $\beta_{2n}$ . Una excelente aproximación a la segunda derivada  $\ddot{\beta}$  es

$$\ddot{\beta}(n\varepsilon) \approx \frac{\vec{\beta}_{n+1} - 2\vec{\beta}_n + \vec{\beta}_{n-1}}{\varepsilon^2}$$

relación que se utiliza para calcular  $\beta_{n+1}$  cuando ya se sabe los valores de  $\beta_n$  y de  $\beta_{n-1}$ , es decir, en lugar de usar como datos iniciales  $\beta(0)$  y  $\dot{\beta}(0)$  es mejor usar  $\beta_{10} = \beta_1(0)$  y  $\beta_{11} = \beta_1(dt) \approx \beta_{10} + dt \dot{\beta}_{10}$ :

$$\beta_{1,n+1} = 2\beta_{1,n} - \beta_{1,n-1} + \varepsilon^2 A_1(\beta_{1n}, \beta_{2n}, t_n)$$

Algoritmo de Verlet para caso bidimensional:

Se denota con índices 0 y 1 a los datos anteriores y con 2 al que se calcula a tiempo  $t$ .

Se da valores iniciales  $b_{10}$ ,  $b_{20}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{21}$  y epsilon se denota  $h$

Se ingresa a un ciclo desde  $n=0$  hasta  $n=n_{\text{max}}$ :

```
t          = h*n;
b12       = 2b11 - b10 + h^2*A1(b11,b21,t);
b22       = 2b22 - b20 + h^2*A2(b11,b21,t);
Guardar en archivo valores de (t b11 b21);
b10       = b11;  b20 = b21;
b11       = b12;  b21 = b22;
```

fin del ciclo cuando  $n$  toma el valor  $n=n_{\text{max}}$

El resultado es un archivo con tres columnas:  $t$ ,  $b_1$  y  $b_2$ .

El método que aquí se ha explicado se debe usar con  $N$  suficientemente grande para tener precisión. Para que los archivos de datos no salgan tan grandes se puede dar la instrucción de guardar datos solo uno de cada  $K$  veces con, por ejemplo,  $K = 10$ .