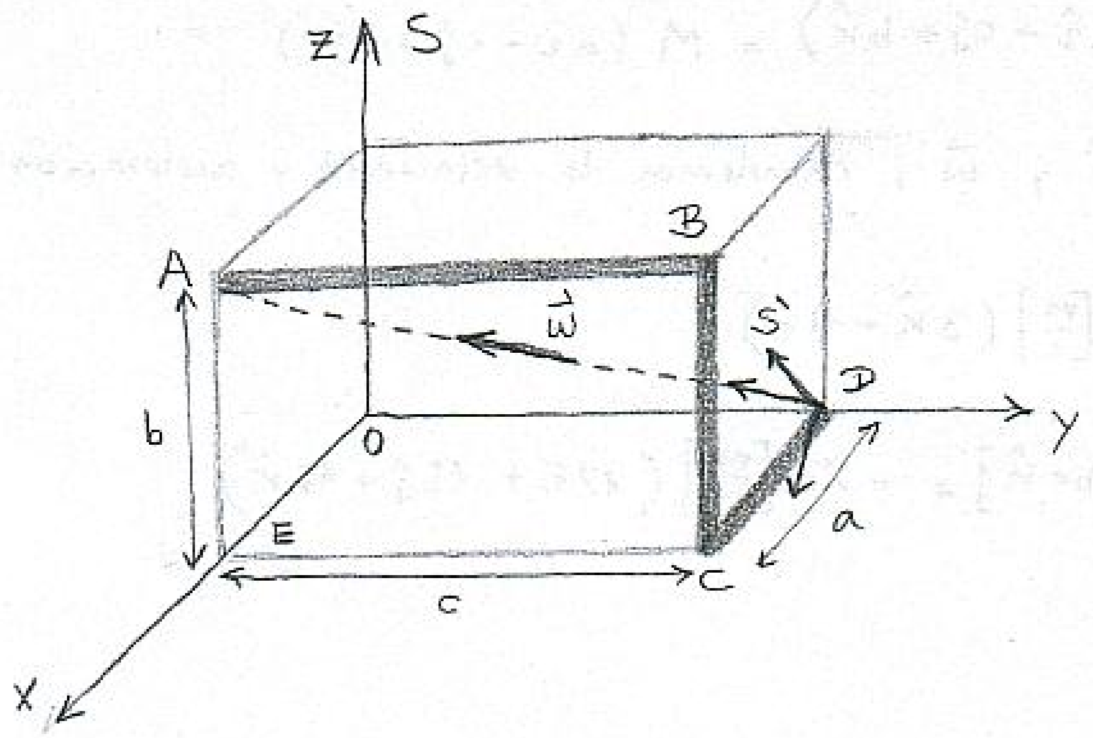
SOLUCIÓN EJERCICIO 2



Con origen en D ponemos un sistema de referencia S' con el eje Z' alineado con la recta $\overleftrightarrow{DA}$ y que es solidario a la barra doblada ABCD. De este modo $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sistema S' c/r a los ejes (X,Y,Z) (sistema S).

Las ecuaciones de movimiento relativo son:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$
$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']$$

Como nos interesa el punto B,

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} \quad , \quad \vec{R} = \overrightarrow{OD} \quad , \quad \vec{r}' = \overrightarrow{DB}$$

(En general $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ varían c/r a S ya que B se mueve.)

En este caso $\vec{R}$ y $\vec{\omega}$ son vectores fijos, luego sus derivadas se anulan. Como el sistema S' es solidario a la barra, $\vec{r}'$ es un vector constante para la derivación con respecto a S', i.e., $\dot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}' = \vec{0}$.

Así las ecuaciones de velocidad y aceleración se reducen a:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$
$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']$$

Para calcular estas cantidades vectoriales en el instante mostrado en la figura notemos que $\vec{r}' = a\hat{\imath} + b\hat{k}$ con $\hat{\imath}, \hat{k}$ vectores unitarios de S (esto es lícito ya que los vectores se pueden escribir en la base que uno desee)

Nos falta escribir $\vec{\omega}$ en la base de S. Nos damos cuenta que un vector que va desde D hacia A se escribe:

$$\overrightarrow{DA} = a\hat{\imath} + b\hat{k} - c\hat{\jmath} \quad \text{(aprovechando las medidas de la caja)}$$

Si normalizamos este vector obtendremos un vector unitario $\hat{\omega}$ en la dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}$:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a\hat{\imath} - c\hat{\jmath} + b\hat{k}\right)$$

El vector $\vec{\omega}$ es simplemente su módulo ($|\vec{\omega}| = 75 \left[\frac{rad}{s}\right]$) en esta dirección:

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\,\hat{\omega} = \frac{75\left[\frac{rad}{s}\right]}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a\hat{\imath} - c\hat{\jmath} + b\hat{k}\right) = M\left(a\hat{\imath} - c\hat{\jmath} + b\hat{k}\right)$$

Ahora disponemos de expresiones para $\vec{r}\,'$ y $\vec{\omega}$; calculemos la velocidad y aceleración de B:

$$\dot{\vec{r}} = Mc\left(a\hat{k} - b\hat{\imath}\right) = 1{,}8\left[\frac{m}{s}\right]\left(3\hat{k} - 4\hat{\imath}\right)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -M^2c\left[ac\hat{\imath} + (a^2+b^2)\hat{\jmath} + bc\hat{k}\right] = -27\left[\frac{m}{s^2}\right]\left(12\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} + 16\hat{k}\right)$$

En los cálculos anteriores se utilizó:

$a = 90$ [mm]

$b = 120$ [mm]

$c = 200$ [mm]