AUXILIAR SISTEMAS DINÁMICOS

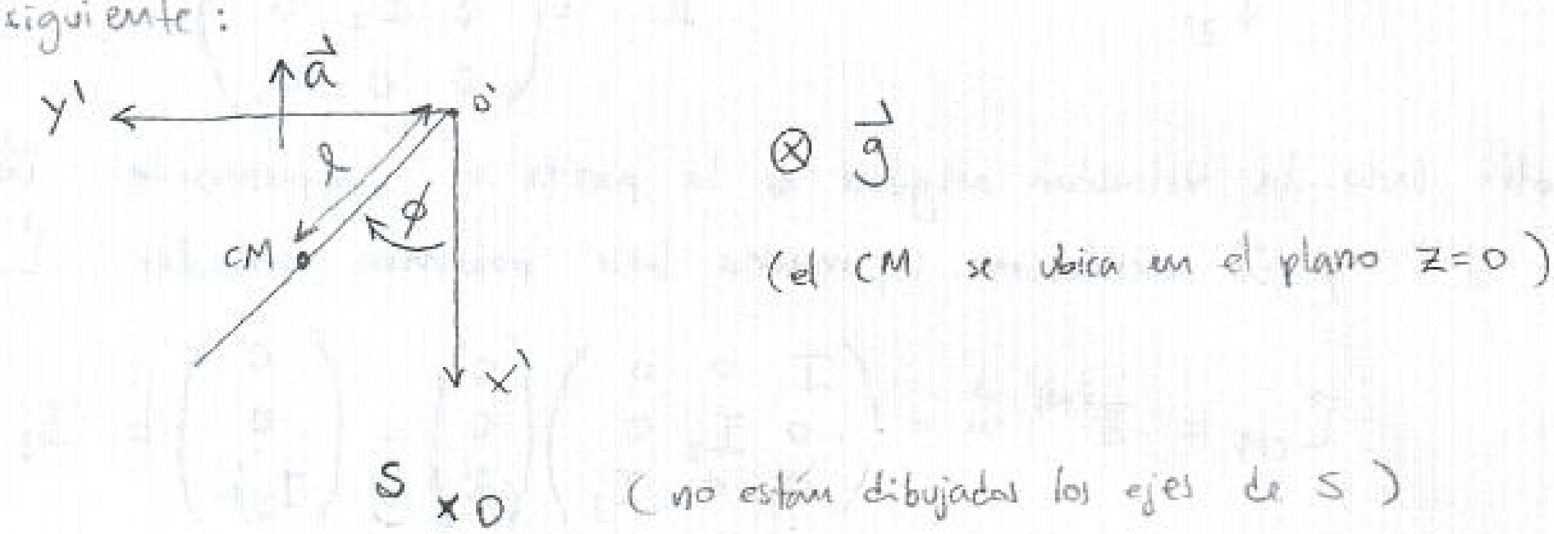
14/08/2K+7

Profesor : Claudio Romero

Auxiliares: Patricio Cubillos, Sebastián Díaz

P1 Un auto con su puerta abierta acelera desde el reposo con aceleración constante $\vec{a}$. El CM de la puerta se encuentra a distancia l de las bisagras. Si el radio de giro de la puerta es r_0, calcular la ecuación de movimiento para el ángulo de apertura de la puerta.

Sol.: Notemos primero que si el auto acelera con $\vec{a}$, también las bisagras de la puerta en cuestión acelerarán con $\vec{a}$. Así, nos abstraemos del auto y situamos un sistema de referencia S' (obviamente no inercial) en las bisagras. Llamemos S a un sistema de referencia inercial que se ubica sobre la carretera en la que se mueve este auto. Una vista aérea de la situación es la siguiente:



Escribamos la posición del CM $\%_r$ a S:

$$\vec{r}_{CM} = \vec{OO'} + \vec{O'CM} = \vec{OO'} + l\hat{\rho}$$

(derivando 2 veces c/r al tiempo) $\Rightarrow \vec{a}_{CM} = -a\hat{z}' + -l\dot{\phi}^2\hat{\rho} + l\ddot{\phi}\hat{\phi}$ $\qquad (\vec{a} = \ddot{\vec{OO'}} = -a\hat{z}')$

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = -(a\cos\phi + l\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (a\sin\phi + l\ddot{\phi})\hat{\phi} \qquad (\hat{z}' = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi})$$

Disponemos de las siguientes ecuaciones de la Mecánica:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_s\,\vec{a}_{CM} \qquad (1)$$

$$\sum \vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} \qquad (2)$$

En este problema nos "haremos los lesos" y no consideraremos que hay gravedad. Esta simplificación está inspirada en el hecho que la puerta se mantiene en equilibrio verticalmente. El problema P5 de esta auxiliar abordará en detalle el caso en que se considera la gravedad.

Habiendo aclarado esto, la única fuerta externa que actúa sobre la puerta es la debida a la bisagra. Escribamos la ecuación (1) para la puerta que consideramos tiene una masa M_s:

$$\vec{F} = M_s\left[-(a\cos\phi + l\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (a\sin\phi + l\ddot{\phi})\hat{\phi}\right] \qquad (3)$$

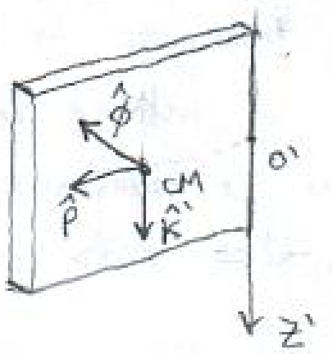
fuerza de la bisagra sobre la puerta

Usemos ahora (2); primero calculemos el torque neto % CM:

$$\sum \vec{\tau}_{CM} = \underbrace{(-l\hat{\rho})}_{\text{este vector va desde el CM a la bisagra que es el punto de aplicación de la fuerza } \vec{F}} \times \vec{F}$$

$$= -M_s l\,(a\,\text{sen}\phi + l\ddot{\phi})\,\hat{k}' \qquad (\text{usando } (3))$$

La puerta la consideramos como un paralelepípedo como lo muestra la figura.



Este poliedro es altamente simétrico y sus ejes de simetría coinciden con la base $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}')$ que resultan ser los ejes principales de la puerta. Así, el tensor de inercia % CM de la puerta es diagonal en esta base

$$\mathbb{I}^{CM} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado la velocidad angular de la puerta es simplemente $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k}'$. Ahora que tenemos $\mathbb{I}^{(CM)}$ y $\vec{\omega}$ escritos en la misma base podemos calcular $\vec{L}_{CM}$:

$$\vec{L}_{CM} = \mathbb{I}^{(CM)}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\dot{\phi} \end{pmatrix} = I_3\dot{\phi}\,\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_3\ddot{\phi}\,\hat{k}' \qquad (\text{ya que } I_3 \text{ y } \hat{k}' \text{ son constantes en el tiempo})$$

Estamos en condiciones de escribir (2):

$$\sum \vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} \Rightarrow -M_s l\,(a\,\text{sen}\phi + l\ddot{\phi})\,\hat{k}' = I_3\ddot{\phi}\,\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{-a}{\left[\left(\frac{I_3}{M_s}\right)\frac{1}{l} + l\right]}\,\text{sen}\phi$$

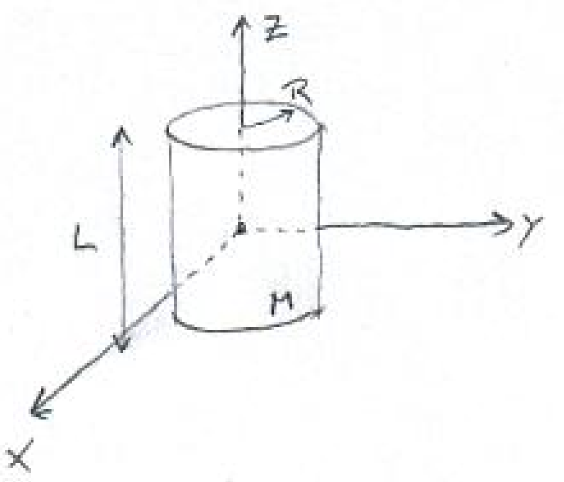
Pero el radio de giro por definición es justamente $r_0 = \sqrt{\frac{I_3}{M_s}}$. Finalmente la ecuación buscada es:

$$\ddot{\phi} = \frac{-a}{\left(\frac{r_0^2}{l} + l\right)}\,\text{sen}\phi$$

Esta ecuación se integra (con integrales elípticas) para obtener $\phi(t)$. Una forma sencilla de verificar que esta ecuación describe lo que sabemos que ocurre (la puerta se cierra) es considerar que la puerta está abierta en un ángulo $\phi \ll 1 \Rightarrow \text{sen}\phi \approx \phi$, obtenemos así la ecuación del viejo amigo MAS $\ddot{\phi} = -\frac{a}{\left(\frac{r_0^2}{l} + l\right)}\phi$ esta ecuación nos dice que la evolución de $\phi(t)$ oscila en torno a $\phi = 0$. En el auto, la puerta no oscila porque al llegar a $\phi = 0$ se cierra y no se mueve más, pero si lográsemos impedir el cierre, veríamos oscilaciones!!

P3

Calculemos el tensor de inercia de un cilindro macizo de radio R, altura L y masa M.



Colocamos unos ejes cartesianos con origen en el CM del cilindro. La parametrización de este cuerpo sólido es:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \quad , \quad \rho \in [0,R] \; , \; \phi \in [0, 2\pi] \; , \; z \in [-\tfrac{L}{2}, \tfrac{L}{2}]$$

Además el diferencial de volumen en cilíndricas es $\rho d\rho d\phi dz$.

Luego tenemos:

$$\mathbb{I}^{(CM)}_{ij} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R [(\vec{r})^2\delta_{ij} - x_i x_j]\rho d\rho d\phi dz$$

Hemos supuesto que el cilindro tiene densidad constante $\rho_0 = \frac{M}{\pi R^2 L}$. Además notemos que:

$$x_1 = x = \rho\cos\phi$$
$$x_2 = y = \rho \operatorname{sen}\phi \qquad ; \quad (\vec{r})^2 = \rho^2 + z^2$$
$$x_3 = z = z$$

Vamos calculando:

$$\mathbb{I}^{(CM)}_{11} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R [\rho^2 + z^2 - \rho^2\cos^2\phi]\rho d\rho d\phi dz$$

$$= \rho_0 \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3 \operatorname{sen}^2\phi \, d\rho d\phi dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R z^2 \rho d\rho d\phi dz \right]$$

$$= \rho_0 \left[\left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\phi d\phi\right)\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\right) + \left(\int_0^R \rho d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2 dz\right)\right]$$

$$= \rho_0 \left[\frac{R^4}{4}\pi L + \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 L} \frac{\pi R^2 L}{4} \left[R^2 + \frac{1}{3}L^2 \right]$$

$$= \frac{M}{4}\left[R^2 + \frac{1}{3}L^2\right]$$

$$\mathbb{I}_{22}^{(CM)} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left[\rho^2 + z^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \right] \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= \rho_0 \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^3 \cos^2\phi \, d\rho \, d\phi \, dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} z^2 \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \right]$$

ya que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\phi = \pi$

$$= \mathbb{I}_{11}^{(CM)}$$

$$\mathbb{I}_{33}^{(CM)} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left[\rho^2 + z^2 - z^2 \right] \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^3 \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= \rho_0 \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^{R} \rho^3 \, d\rho \right)$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 L} \, L \, 2\pi \, \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{1}{2} M R^2$$

$$\mathbb{I}_{12}^{(CM)} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} -(\rho\cos\phi)(\rho \operatorname{sen}\phi) \, \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= -\rho_0 \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \right) \left(\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi} \right) \left(\int_0^{R} \rho^3 \, d\rho \right)$$

$$= 0$$

$$\mathbb{I}_{13}^{(CM)} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} -(\rho\cos\phi) \, z \, \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= -\rho_0 \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z \, dz \right) \left(\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi} \right) \left(\int_0^{R} \rho^2 \, d\rho \right)$$

$$= 0$$

$$\mathbb{I}^{(CM)}_{23} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} -(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi)\, z\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= -\rho_0 \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z\, dz\right)\left(\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\phi\, d\phi}\right)\left(\int_0^{R} \rho^2 d\rho\right)$$

$$= 0$$

Ocupando el hecho que $\mathbb{I}^{(CM)}$ es simétrico obtenemos:

$$\mathbb{I}^{(CM)} = \begin{pmatrix} \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{1}{3}L^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{1}{3}L^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} M R^2 \end{pmatrix}$$

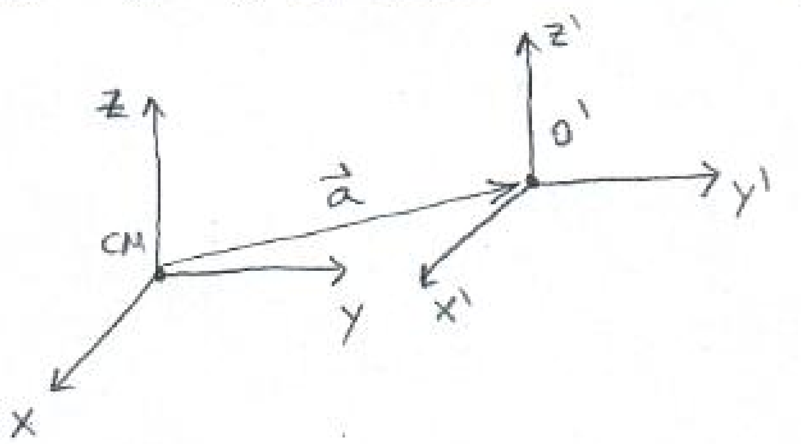
Resultó diagonal, luego los ejes que escogimos resultaron ser ejes principales.

Teorema de Steiner

Nos cuenta que si queremos calcular el tensor de inercia respecto a un sistema de ejes paralelos a los del CM, pero desplazados a un punto O', debemos ocupar la fórmula:

$$\mathbb{I}^{O'}_{ij} = \mathbb{I}^{(CM)}_{ij} + M\left[(\vec{a})^2 \delta_{ij} - a_i a_j\right]$$

Donde $\vec{a}$ es un vector constante que va del CM a O'.



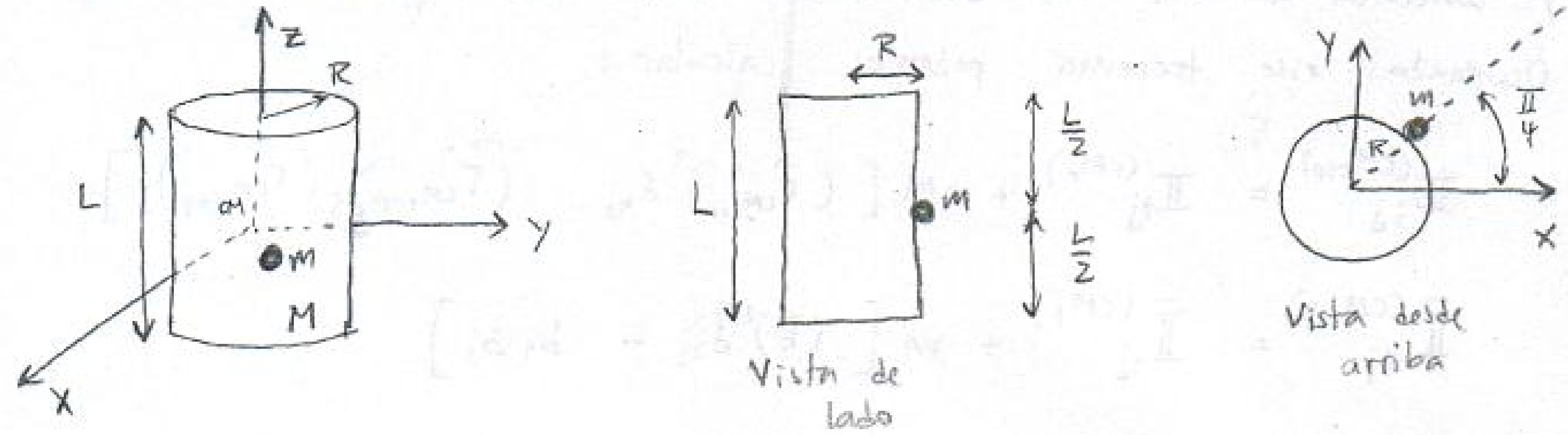
Si inicialmente nuestro $\mathbb{I}^{(CM)}$ era diagonal, al calcular el tensor de inercia en otro origen, pero con los ejes paralelos al del sistema CM, ¿¿queda diagonal este nuevo tensor??

La respuesta a esta pregunta es directa: el nuevo tensor de inercia queda diagonal sólo si el desplazamiento del origen es a lo largo de los ejes principales ($\vec{a}$ tiene una sola componente).

Veamos un ejemplo: $\vec{a} = a\hat{z}$ (i.e.: $a_1 = a$; $a_2 = 0 = a_3$; $(\vec{a})^2 = a^2$)

$$\Rightarrow M\left[(\vec{a})^2 \delta_{ij} - a_i a_j\right] = M\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{I}^{O'} = \begin{pmatrix} \frac{M}{4}\left(R^2+\frac{1}{3}L^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}\left(R^2+\frac{1}{3}L^2\right) + Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2}R^2 + Ma^2 \end{pmatrix}$$

P4 Consideremos el mismo cilindro del P3, pero con una masa puntual en su manto:



Vámonos con cuidado. En este problema se distinguen 3 cantidades de los 3 cuerpos presentes que resumo en la siguiente tabla de doble entrada:

	Centro de Masa	Vector Posición Centro de Masa	Tensor de Inercia
Cilindro	CM_c	$\vec{r}_{CM_c}$	$\mathbb{I}$
Partícula	CM_p	$\vec{r}_{CM_p}$	$\bar{\mathbb{I}}$
Cilindro + Partícula	CM_{c+p}	$\vec{r}_{CM_{c+p}}$	$\tilde{\mathbb{I}}$

Ya sabemos que: $\vec{r}_{CM_c} = \vec{0}$ $\wedge$ $\vec{r}_{CM_p} = R\cos\frac{\pi}{4}\hat{\imath} + R\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\hat{\jmath} = \frac{R}{\sqrt{2}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$

Para efectos de cálculo del $\vec{r}_{CM_{c+p}}$ podemos considerar que toda la masa del cilindro se concentra en su centro de masa ($\vec{r}_{CM_c} = \vec{0}$). Así:

$$\vec{r}_{CM_{c+p}} = \frac{M\overset{\vec{0}}{\cancel{\vec{r}_{CM_c}}} + m\vec{r}_{CM_p}}{M+m} = \frac{mR}{\sqrt{2}(M+m)}(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$$

Estamos interesados en calcular el tensor de inercia del sistema cilindro + partícula. Nosotros sólo sabemos calcular (con nuestra conocida fórmula) tensores de inercia c/r a un sistema solidario al sólido anclado en el centro de masa del sólido, es por ello que ahora calcularemos $\tilde{\mathbb{I}}^{(CM_{c+p})}$ (es decir, el tensor de inercia del cilindro + partícula c/r al centro de masa del cilindro + partícula)

Hemos aprendido que:

$$\tilde{\mathbb{I}}^{(CM_{c+p})}_{ij} = \mathbb{I}^{(CM_{c+p})}_{ij} + \bar{\mathbb{I}}^{(CM_{c+p})}_{ij} \qquad (1)$$

O sea, el tensor de inercia de un sólido compuesto de 2 partes es igual a la suma de los tensores de inercia de la partes SIEMPRE Y CUADO TODOS LOS TENSORES ESTÉN ESCRITOS RESPECTO A UN MISMO SISTEMA DE REFERECIA (mismos ejes y mismo origen!!)

También hemos aprendido el Teorema de Steiner o de los ejes paralelos:

$$\mathbb{I}^{(O)} = \mathbb{I}^{(CM)} + M\left[(\vec{a})^2\delta_{ij} - a_i a_j\right]$$

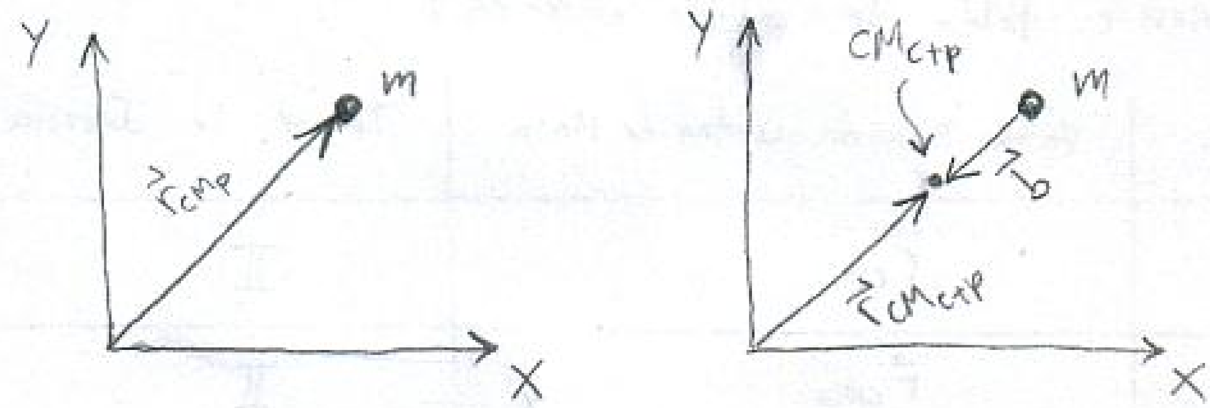
Este teorema nos permite calcular el tensor de inercia de un sólido de masa M respecto a un sistema de referencia con origen en O con los ejes paralelos al sistema solidario al sólido y anclado en el CM, siendo $\vec{a}$ un vector que va de CM hacia O.

Ocupando este teorema podemos calcular:

$$\mathbb{I}_{ij}^{(CM_{C+P})} = \mathbb{I}_{ij}^{(CM_C)} + M\left[(\vec{r}_{CM_{C+P}})^2 \delta_{ij} - (r_{CM_{C+P}})_i (r_{CM_{C+P}})_j \right] \qquad (2)$$

$$\overline{\mathbb{I}}_{ij}^{(CM_{C+P})} = \overline{\mathbb{I}}_{ij}^{(CM_P)} + m\left[(\vec{b})^2 \delta_{ij} - b_i b_j \right] \qquad (3)$$

El siguiente dibujo aclara la situación de los vectores:



$$\Rightarrow \vec{b} = \vec{r}_{CM_{C+P}} - \vec{r}_{CM_P} = \frac{m}{M+m}\vec{r}_{CM_P} - \vec{r}_{CM_P} = -\frac{M}{M+m}\vec{r}_{CM_P} = -\frac{MR}{\sqrt{2}(M+m)}(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$$

Llamemos:

$$\left.\begin{aligned} A_{ij} &= M\left[(\vec{r}_{CM_{C+P}})^2 \delta_{ij} - (r_{CM_{C+P}})_i (r_{CM_{C+P}})_j \right] \\ B_{ij} &= m\left[(\vec{b})^2 \delta_{ij} - b_i b_j \right] \end{aligned}\right\} (4)$$

Además es claro que $\overline{\mathbb{I}}_{ij}^{(CM_P)} = 0$, i.e., el tensor de inercia de la partícula (masa puntual) con respecto a su propio centro de masa (o sea en la posición donde está esta partícula) es nulo. Denle unas vueltas en su cabeza y también traten de demostrarlo usando la definición del tensor de inercia para el caso discreto.

Ahora estamos listos, reemplazando (2) y (3), considerando las definiciones (4), en (1):

$$\tilde{\mathbb{I}}_{ij}^{(CM_{C+P})} = \mathbb{I}_{ij}^{(CM_C)} + A_{ij} + B_{ij}$$

El tensor $\mathbb{I}_{ij}^{(CM_C)}$ lo calculamos en el P3) y unos pocos pasos y cálculos nos entregan:

$$A = \frac{M}{2}\left(\frac{mR}{M+m}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{m}{2}\left(\frac{MR}{M+m}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{I}}^{(CM_{C+P})} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{aligned} a &= \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{1}{3}L^2\right) + \left(\frac{R^2}{2}\right)\frac{M^2+m^2}{(M+m)} \\ b &= -\left(\frac{R^2}{2}\right)\frac{M^2+m^2}{(M+m)} \\ c &= \frac{1}{2}MR^2 + R^2\frac{M^2+m^2}{(M+m)} \end{aligned}$$

Vemos que $\tilde{\mathbb{I}}^{(CM_{c+p})}$ no es diagonal, diagonalicémoslo !! Esto equivale a diagonalizar la matriz:

$$\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Encontremos primero los valores propios de $\tilde{\mathbb{I}}$; éstos corresponden a las raíces del polinomio característico de $\tilde{\mathbb{I}}$.

$$\det(\tilde{\mathbb{I}} - \lambda \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{matriz identidad}}) = 0 \iff \left[(a-\lambda)^2 - b^2\right](c-\lambda) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = a+b \\ \lambda_2 = a-b \\ \lambda_3 = c \end{cases}$$

Calculemos ahora los vectores propios. A modo de ejemplo calculemos el asociado a λ_1:

$$(\tilde{\mathbb{I}} - \lambda_1 \mathbb{1})\vec{v}_1 = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} a-(a+b) & b & 0 \\ b & a-(a+b) & 0 \\ 0 & 0 & c-(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{matrix} \left.\begin{matrix} -bx + by = 0 \\ bx - by = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y = \alpha \\ [c-(a+b)]z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{normalizando}} \hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente se encuentran:

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El conjunto $\{\hat{v}_i\}_{i=1}^{3}$ es ortonormal (son mutuamente ortogonales de norma 1). El hecho que son ortogonales entre sí está garantizado porque corresponden a valores propios distintos de una matriz simétrica.

Definamos $P = \left[\hat{v}_1 \,|\, \hat{v}_2 \,|\, \hat{v}_3\right]$ esta matriz satisface $PP^t = P^tP = \mathbb{1}$, es decir, es una matriz ortogonal.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación en torno al eje Z con ángulo $\pi/4$

En definitiva:

$$\tilde{\mathbb{I}}^{(CM_{c+p})} = P^t \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{} P$$

↳ este es el nuevo tensor de inercia c/r a un sistema con origen en CM_{c+p}, pero con ejes $\{\hat{v}_i\}_{i=1}^{3}$

Nota: el $\overline{\overline{\mathbb{I}}}^{(CM_{C+P})}$ que calculamos según (3) también podría haberse calculado como

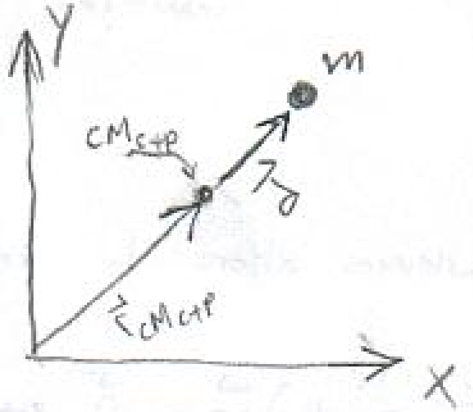
$$\overline{\overline{\mathbb{I}}}^{(CM_{C+P})}_{ij} = m\left[(\vec{d})^2 \delta_{ij} - d_i d_j \right] \qquad (*)$$

es decir, ocupando la fórmula para el tensor de inercia en el caso discreto con un sistema con origen en CM_{C+P}. Resulta que $\vec{d} = -\vec{b}$ (el definido en (3)) y vemos que (*) es igual a (2):

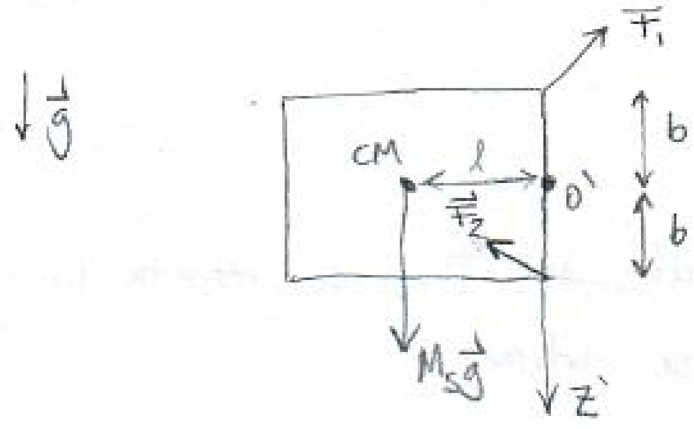
$$\overline{\overline{\mathbb{I}}}^{(CM_{C+P})}_{ij} = \cancelto{0}{\overline{\overline{\mathbb{I}}}^{(CM_P)}_{ij}} + m\left[(\vec{b})^2 \delta_{ij} - b_i b_j \right]$$

$$= m\left[(-\vec{b})^2 \delta_{ij} - (-b_i)(-b_j) \right]$$

$$= m\left[(\vec{d})^2 \delta_{ij} - d_i d_j \right]$$



P5] Lo prometido es deuda. Ahora resolveremos el P1] considerando la gravedad. Una buena figura de la puerta y las fuerzas que actúan sobre ella es la siguiente:



(Estamos suponiendo que el CM se ubica siempre en el plano z=0)

Vemos que hay 3 fuerzas externas: el peso que está aplicado sobre el CM de la puerta y dos fuerzas debidas a la bisagra aplicadas en los vértices de la puerta. Un ejemplo cotidiano, para que se convenzan de estas dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es una caja de CD's (estuve jugando con una de estas cajas y me di cuenta de las las fuerzas aplicadas en los distintos vértices).

Ahora la ecuación de traslación del CM queda:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_s \vec{a}_{CM} \Rightarrow M_s\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M_s\left[-A\hat{\rho} + B\hat{\phi}\right], \text{ con } \underbrace{\begin{aligned} A &= (a\cos\phi + \ell\dot{\phi}^2) \\ B &= (a\,\text{sen}\,\phi + \ell\ddot{\phi}) \end{aligned}}_{\text{esto proviene de lo explicado en el P1]}}$$

Las ecuaciones escalares de esta ecuación vectorial:

$$\hat{\rho}] \quad F_{1\rho} + F_{2\rho} = -M_s A \qquad (1)$$

$$\hat{\phi}] \quad F_{1\phi} + F_{2\phi} = M_s B \qquad (2)$$

$$\hat{k}'] \quad F_{1z'} + F_{2z'} = -M_s g \qquad (3)$$

La ecuación del torque:

→ al igual que en el P1], $\vec{L}_{CM} = \mathbb{I}^{CM}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\dot{\phi} \end{pmatrix} = I_3\dot{\phi}\hat{k}'$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} = I_3\ddot{\phi}\hat{k}'$$

→ el torque neto es diferente ahora:

$$\sum \vec{\tau}_{CM} = (-\ell\hat{\rho} - b\hat{k}')\times\vec{F}_1 + (-\ell\hat{\rho} + b\hat{k}')\times\vec{F}_2 + \cancelto{\vec{0}}{\vec{0}\times M_s\vec{g}}$$

$$= (-\ell\hat{\rho})\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + (b\hat{k}')\times(\vec{F}_2 - \vec{F}_1)$$

$$= (-\ell\hat{\rho})\times\left[(F_{1\rho} + F_{2\rho})\hat{\rho} + (F_{1\phi} + F_{2\phi})\hat{\phi} + (F_{1z'} + F_{2z'})\hat{k}'\right] +$$

$$(b\hat{k}')\times\left[(F_{2\rho} - F_{1\rho})\hat{\rho} + (F_{2\phi} - F_{1\phi})\hat{\phi} + (F_{2z'} - F_{1z'})\hat{k}'\right]$$

$$= -M_s\ell B\hat{k}' - M_s g\ell\hat{\phi} + b(F_{2\rho} - F_{1\rho})\hat{\phi} - b(F_{2\phi} - F_{1\phi})\hat{\rho} \quad \text{(se usó (3))}$$

Las ecuaciones escalares provenientes de $\sum \vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM}$ resultan ser:

$\hat{\rho}]$ $-b(F_{2\phi}-F_{1\phi})=0$

$\hat{\phi}]$ $b(F_{2\rho}-F_{1\rho})-M_s g l=0$

$\hat{k}']$ $-M_s l B = I_3\ddot{\phi}$

De la ecuación para $\hat{k}']$ y de la definición de B, se rescata la ecuación diferencial para ϕ encontrada en el P1]. De $\hat{\rho}]$ y $\hat{\phi}]$ se obtiene:

$$F_{2\phi}=F_{1\phi} \qquad (4)$$

$$F_{2\rho}-F_{1\rho}=M_s g\frac{l}{b} \qquad (5)$$

Obtenemos los sistemas de ecuaciones: (2), (4) y (1), (5). Sus soluciones son:

$$F_{1\rho}=-\frac{1}{2}M_s\left[3A-\frac{gl}{b}\right] \qquad F_{2\rho}=\frac{1}{2}M_s\left[\frac{gl}{b}-A\right]$$

$$F_{1\phi}=\frac{1}{2}M_s B \qquad F_{2\phi}=\frac{1}{2}M_s B$$

y además teníamos (3): $F_{1z'}+F_{2z'}=-M_s g$

En definitiva, al considerar la gravedad se tuvo que modelar en forma más precisa las fuerzas ejercidas por la bisagra sobre la puerta. Ocupando las mismas ecuaciones que en el P1] ($\sum\vec{F}_{ext}=M_s\vec{a}_{CM}$ y $\sum\vec{\tau}_{CM}=\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$) rescatamos la misma ecuación diferencial para ϕ (lo que justifica el que hayamos despreciado la gravedad en el P1]), pero además obtuvimos información sobre las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. De hecho si conocemos la ecuación para ϕ, podemos utilizarla para hacer que $A=A(\phi)$ y $B=B(\phi)$ y finalmente tener

$$F_{i\rho}=F_{i\rho}(\phi)\ ;\ F_{i\phi}=F_{i\phi}(\phi)\ ,\quad i\in\{1,2\}$$