

# AUXILIAR SISTEMAS DINÁMICOS

21/08/2017

Profesor: Claudio Romero  
 Auxiliares: Patricio Cubillos  
 Sebastián Díaz

**P1)** Una plancha plana rectangular de masa  $M$  y lados  $a$  y  $2a$  rota con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje que pasa por dos de sus vértices opuestos. Los soportes que sostienen la plancha están colocados en los vértices. Encontrar las fuerzas de los soportes sobre la plancha.

Sol.:

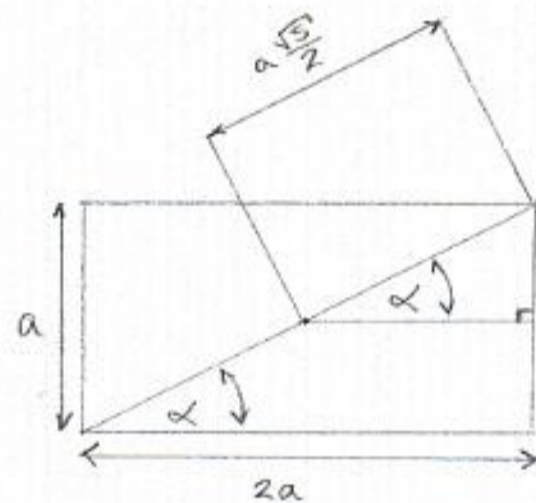
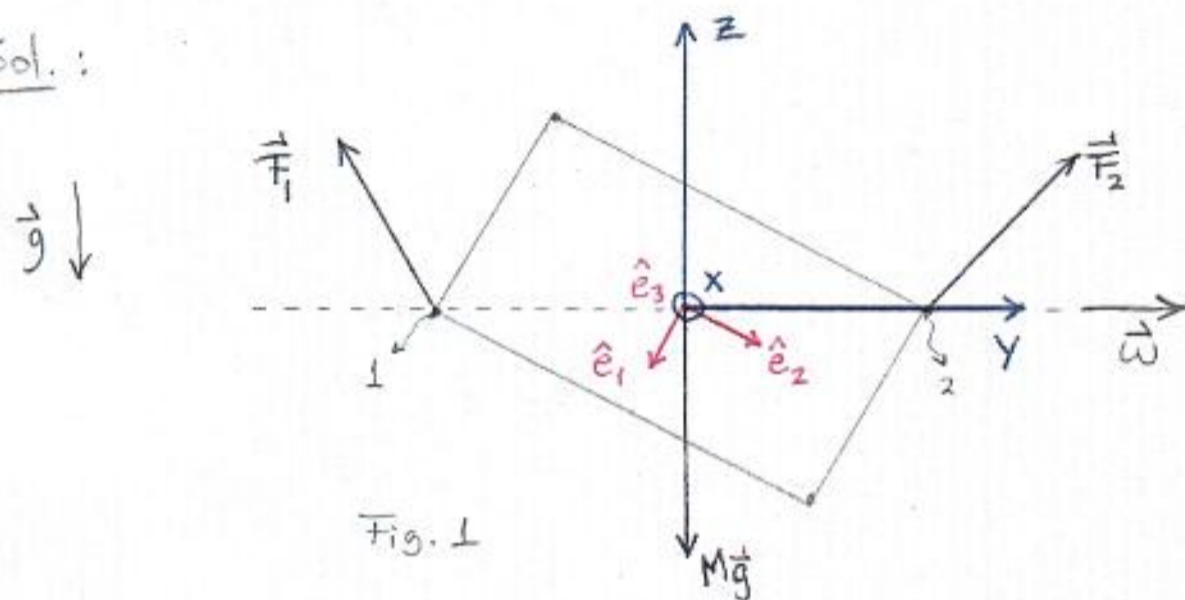


Fig. 1

Fig. 2

Para resolver este problema ponemos un sistema de referencia inercial  $S$  con ejes  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  anclado en el CM (que coincide con el centro geométrico) de la plancha. Notemos que los soportes indicados con los números 1 y 2 sujetan a la plancha y le impiden que se mueva horizontalmente, luego el CM está en reposo (esto justifica nuestro sistema  $S$  como inercial). Resaltamos que los ejes  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  están fijos!!

En la Fig. 1 aparece el DCL de la plancha. El peso, recordemos, actúa sobre el CM y las fuerzas que los soportes le ejercen a la plancha:  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  son nuestras incógnitas así que la forma en que están dibujadas no tiene porqué ser la correcta. Había que dibujarlas y se me ocurrió ponerlas así; al final de este problema sabremos casi-exactamente como dibujarlas.

La ecuación de movimiento de traslación ( $\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm}$ ) nos da la información:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + M\vec{g} = \vec{0} \quad (\text{ya que el CM está en reposo, } \vec{a}_{cm} = \vec{0})$$

Las ecuaciones escalares son:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{i} \mid F_1^x + F_2^x = 0 \\ \hat{j} \mid F_1^y + F_2^y = 0 \\ \hat{k} \mid F_1^z + F_2^z = Mg \end{array} \right\} (1)$$

A continuación usaremos las ecuaciones de Euler para determinar el torque neto  $\tau_{cm}$  en la base de los  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$  (los ejes principales de la plancha) y luego lo igualaremos con el torque  $\tau_{cm}$  escrito en la base de  $S$ .

Calculamos entonces el torque  $\tau_{CM}$  en la base de S:

$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau}_{CM} &= \vec{r}_{CM \rightarrow 1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{CM \rightarrow 2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{CM \rightarrow CM} \times M\vec{g} \\ &= \left(-\frac{a\sqrt{5}}{2} \hat{j}\right) \times \vec{F}_1 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} \hat{j}\right) \times \vec{F}_2 \quad (\text{ver Fig. 2}) \\ &= \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} \hat{j}\right) \times (\vec{F}_2 - \vec{F}_1) \\ &= \frac{a\sqrt{5}}{2} \left[ (\vec{F}_2^z - \vec{F}_1^z) \hat{i} - (\vec{F}_2^x - \vec{F}_1^x) \hat{k} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

La velocidad angular de la plancha escrita en la base de S es  $\vec{\omega} = \omega \hat{j}$ , pero para ocupar las ecuaciones de Euler necesitamos las componentes de la velocidad angular escritas en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ . La siguiente figura intenta aclarar las direcciones de esta base.

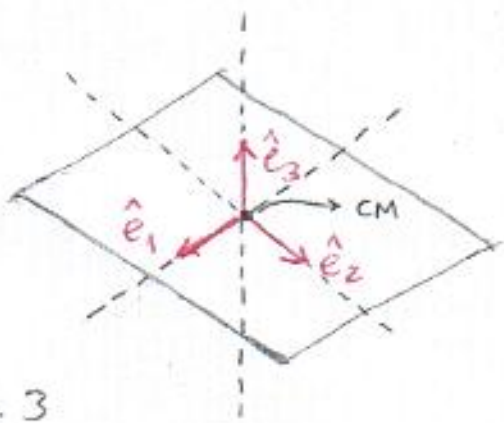


Fig. 3

Anclado en el CM, los  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$  fueron escogidos en las direcciones de los ejes de simetría de la plancha. El vector  $\hat{e}_3$  es  $\perp$  al plano de la plancha.

En esta base, el tensor de inercia es diagonal,  $\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

Si lo pensamos un poco,  $\hat{j}$  es  $\perp$  a  $\hat{e}_3$ , pero  $\hat{j}$  está a lo largo de una diagonal de la plancha y  $\hat{e}_3$  es  $\perp$  a la plancha. Así que lo único que nos interesa para proyectar  $\hat{j}$  en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$  está en la siguiente figura:

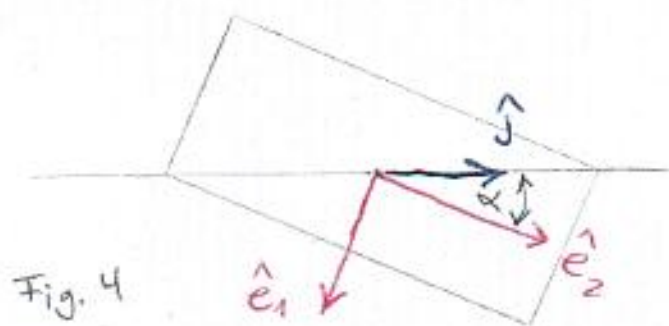


Fig. 4

$$\Rightarrow \hat{j} = -\sin\alpha \hat{e}_1 + \cos\alpha \hat{e}_2 \quad (3)$$

Aprovechemos este momento para proyectar  $\hat{e}_3$  en la base de S (esto lo necesitaremos después). Nos inspiraremos en la siguiente figura:

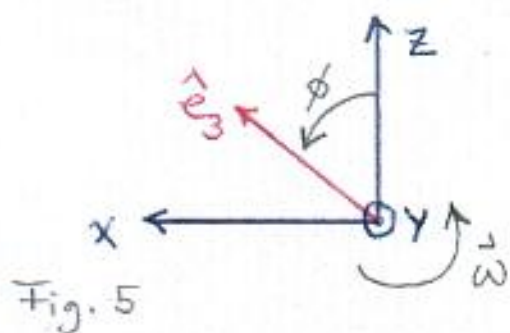


Fig. 5

$$\Rightarrow \hat{e}_3 = \sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{k}$$

Además, como  $\omega = \dot{\phi}$ :  $\dot{\phi} = \omega \Rightarrow \phi(t) = \omega t$  (suponiendo que  $\phi(0) = 0$ )

Así:

$$\hat{e}_3 = \sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{k} \quad (4)$$

Volviendo a lo de la velocidad angular,

$$\vec{\omega} = \omega \hat{j}$$

$$= -\omega \sin\alpha \hat{e}_1 + \omega \cos\alpha \hat{e}_2 \quad (\text{usando (3)})$$

Ya que el vector velocidad angular es el mismo independientemente de la base en que lo escribamos:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 \quad (\text{vel. angular escrita en la base } \{\hat{e}_i\}_{i=1}^3)$$

comparando con lo obtenido justo antes:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\omega \sin \alpha \\ \omega_2 &= \omega \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{ya que } \omega \text{ y } \alpha \text{ son constantes}) \\ \omega_3 &= 0 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones de Euler calculamos las componentes  $\tau_i$  del torque neto  $\tau$  CM en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ \tau_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = -(I_2 - I_1) \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha = (I_1 - I_2) \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

Entonces el torque neto  $\tau$  CM en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$  que llamaremos  $\vec{\tau}$  es:

$$\vec{\tau} = (I_1 - I_2) \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \hat{e}_3 \quad (5)$$

Recordando, una vez más, que los vectores son los mismos independientemente de la base en que los escribamos, podemos escribir:

$$\sum \vec{\tau}_{cm} = \vec{\tau}$$

Usando (2), (5) y (4) obtenemos:

$$\frac{a\sqrt{5}}{2} \left[ (\tau_2^z - \tau_1^z) \hat{i} - (\tau_2^x - \tau_1^x) \hat{k} \right] = (I_1 - I_2) \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \left[ -\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{k} \right]$$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} \hat{i}) \quad \tau_2^z - \tau_1^z &= \frac{2}{a\sqrt{5}} (I_2 - I_1) \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin(\omega t) = \frac{I_2 - I_1}{a\sqrt{5}} \omega^2 \sin(2\alpha) \sin(\omega t) \\ \hat{k}) \quad \tau_2^x - \tau_1^x &= \frac{2}{a\sqrt{5}} (I_2 - I_1) \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \cos(\omega t) = \frac{I_2 - I_1}{a\sqrt{5}} \omega^2 \sin(2\alpha) \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} (6)$$

Los juegos de ecuaciones (4) y (6) nos permiten despejar las componentes de las fuerzas y obtener:

$$\begin{aligned} F_1^x &= -\frac{I_2 - I_1}{2a\sqrt{5}} \omega^2 \sin(2\alpha) \cos(\omega t) & F_2^x &= \frac{I_2 - I_1}{2a\sqrt{5}} \omega^2 \sin(2\alpha) \cos(\omega t) \\ F_1^z &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{I_2 - I_1}{a\sqrt{5}} \omega^2 \sin(2\alpha) \sin(\omega t) - Mg \right] & F_2^z &= \frac{1}{2} \left[ \frac{I_2 - I_1}{a\sqrt{5}} \omega^2 \sin(2\alpha) \sin(\omega t) + Mg \right] \end{aligned}$$

$$F_1^y = -F_2^y$$

Vemos que las componentes en  $\hat{j}$  de las fuerzas quedan indeterminadas, sólo pudimos determinar que una es la opuesta de la otra (esto asegura el equilibrio estático del CM de la plancha). No existe ningún problema con nuestra solución, es imposible determinar  $F_1^y$ ,  $F_2^y$ . Si quisiéramos hacerlo deberíamos considerar deformaciones...

P2 Este problema consiste en estudiar el movimiento de un trompo como el de la Figura 4, sujeto a las condiciones:

- el trompo rueda sin resbalar
- el punto de contacto describe una circunferencia con velocidad angular constante  $\vec{\Omega}$
- $\theta = \text{cte}$

La Figura 2 muestra el movimiento que queremos estudiar.

Ya que  $\theta = \text{cte}$ , la posición del CM será (usando coordenadas cilíndricas):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} = \rho \hat{\rho} &\Rightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} \quad , \text{ pero } \dot{\rho} = 0 \ (\rho = \text{cte}) \text{ y } \dot{\phi} = \Omega = \text{cte} \\ &\Rightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} = \rho \Omega \hat{\phi} \\ &\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{CM} = -\rho \Omega^2 \hat{\rho} \quad (1) \end{aligned}$$

Del DCL de la Figura 4 tenemos que:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = -Mg\hat{k} + N\hat{k} - f\hat{\rho} = M\ddot{\vec{r}}_{CM}$$

el signo menos puesto aquí refleja que ya sabemos la dirección y sentido de  $\vec{F}$  y que  $f$  será el módulo de  $\vec{F}$ .

De (1) obtenemos las ecs. esc. de mov.:

$$\hat{\rho} \downarrow \quad f = M\rho\Omega^2 \quad (2)$$

$$\hat{\phi} \downarrow \quad 0 = 0$$

$$\hat{k} \downarrow \quad N - Mg = 0 \rightarrow (\text{en la Fig. 4 ya aparece } N = Mg)$$

También disponemos de la ecuación:

$$f \leq \mu N = \mu Mg \Rightarrow M\rho\Omega^2 \leq \mu Mg \Rightarrow \rho\Omega^2 \leq \mu g \quad (3)$$

La ecuación anterior nos garantiza que el punto de contacto no se deslizará radialmente.

Calculamos el torque neto con respecto al CM  $\vec{\tau}_{CM}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{CM} &= (l \sin\theta \hat{\rho} - l \cos\theta \hat{k}) \times [\vec{F} + \vec{N}] \quad (\text{despreciando } \delta) \\ &= (l \sin\theta \hat{\rho} - l \cos\theta \hat{k}) \times [-f\hat{\rho} + Mg\hat{k}] \\ &= (-Mgl \sin\theta + fl \cos\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Ya que  $f \leq \mu Mg$  y  $\mu \leq 1 \Rightarrow f \leq Mg \Rightarrow \frac{f}{Mg} \leq 1$ . Entonces

$$\tau \equiv Mgl \sin\theta - fl \cos\theta \geq 0 \quad \text{ya que}$$

$$Mgl \sin\theta - fl \cos\theta \geq 0 \Leftrightarrow \tan\theta \geq \frac{f}{Mg}$$

y no puede ocurrir que  $\frac{f}{Mg} \geq \tan\theta$  ya que implicaría que  $1 \geq \tan\theta$  y en realidad  $\theta$  puede ser cualquier valor entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$ .

Luego  $\vec{\tau}_{cm} = -\tau \hat{\rho} = -(Mgl \sin \theta - fl \cos \theta) \hat{\rho}$

$\Rightarrow \|\vec{\tau}_{cm}\| = \tau = Mgl \sin \theta - fl \cos \theta$

Supongamos que  $\hat{e}_3$  está en la dirección del eje del trompo. Si  $\omega_3$  es muy grande comparada con  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , el vector momento angular  $\vec{L}_{cm}$  podrá considerarse aproximadamente como  $\vec{L}_{cm} \approx I_3 \omega_3 \hat{e}_3$ . En este caso vemos que  $\vec{\tau}_{cm}$  y  $\vec{L}_{cm}$  son ortogonales (ya que  $\hat{e}_3 \perp \hat{\rho}$ ). Esta ortogonalidad se refleja en que

$\vec{\tau}_{cm} = \tau_1 \hat{e}_1 + \tau_2 \hat{e}_2$  (sin  $\tau_3 \hat{e}_3$ , pues así no se tendría  $\vec{\tau}_{cm} \perp \vec{L}_{cm}$ )

De la ecuación de Euler para  $\tau_3$  se obtiene:

$\tau_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = cte$

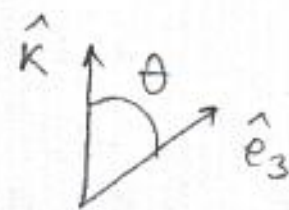
o (ya que el trompo es simétrico  $\Rightarrow I_1 = I_2$ )

La ecuación:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{cm} &= \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}_s = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}_{s'} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_{cm} && (\text{S}' \text{ es el sistema de referencia determinado por los } \{\hat{e}_i\}_{i=1}^3) \\ &= \frac{d}{dt}_{s'} (I_3 \omega_3 \hat{e}_3) + \vec{\Omega} \times \vec{L}_{cm} \\ &= \left[ \frac{d}{dt}_{s'} (I_3 \omega_3) \right] \hat{e}_3 + \vec{\Omega} \times \vec{L}_{cm} && (\omega_3 \text{ y } I_3 \text{ son constantes}) \\ &= \vec{\Omega} \times \vec{L}_{cm} \end{aligned}$$

$\vec{\Omega}$  corresponde a la velocidad angular de  $S'$  wrt a  $S$ , en este caso se tiene que  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$  (piénsenlo e imagínenselo)

Luego:  $\vec{\tau}_{cm} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_{cm} = (\Omega \hat{k}) \times (I_3 \omega_3 \hat{e}_3)$



$\Rightarrow \tau = \|\vec{\tau}_{cm}\| = \Omega I_3 \omega_3 \|\hat{k} \times \hat{e}_3\| = \Omega I_3 \omega_3 \sin \theta$

$\Rightarrow Mgl \sin \theta - fl \cos \theta = \Omega I_3 \omega_3 \sin \theta$

Sustituyendo con (2):

$$\frac{Mgl}{I_3 \omega_3} \left( 1 - \Omega^2 \frac{pl \cos \theta}{g} \right) = \Omega \quad (4)$$

La condición de rodar sin resbalar corresponde a imponer que el punto de contacto del trompo con la superficie horizontal tenga velocidad nula.

En este caso, la forma más sencilla de encontrar una ecuación que nos ligue nuestras variables como resultado de imponer esta condición de rodar sin resbalar es la siguiente:

El arco que barre el eje del trompo (cilindro de radio  $\delta$ ) debe ser igual al arco que barre el punto de contacto sobre la circunferencia de radio  $(\rho + l \sin \theta)$  (ver figura 2). Si llamamos  $\psi$  al ángulo que gira el eje del trompo y si  $\phi$  es el ángulo que barre el punto de contacto, entonces:

$$\text{igualdad de arcos} \longrightarrow \psi \delta = \phi (\rho + l \sin \theta) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\psi} \delta = \dot{\phi} (\rho + l \sin \theta)$$

$$\omega_3 \delta = \Omega (\rho + l \sin \theta) \quad (5)$$

Las ecuaciones (3), (4) y (5) determinan los posibles valores de  $\rho$ ,  $\Omega$  y  $\omega_3$  para este movimiento del trompo (es decir sujeto a las 3 condiciones que se enumeraron al principio). Por ejemplo, si se fijan los parámetros:

$$\delta = 0,3 \text{ [cm]}$$

$$a = 3 \text{ [cm]}$$

$$l = 1,5 \text{ [cm]}$$

$$I_3 \approx \frac{1}{2} M a^2$$

$$\theta = 45^\circ$$

las ecuaciones (4) y (5) permiten obtener  $\rho(\omega_3)$  y  $\Omega(\omega_3)$  como en la Figura 3.

Figura 1

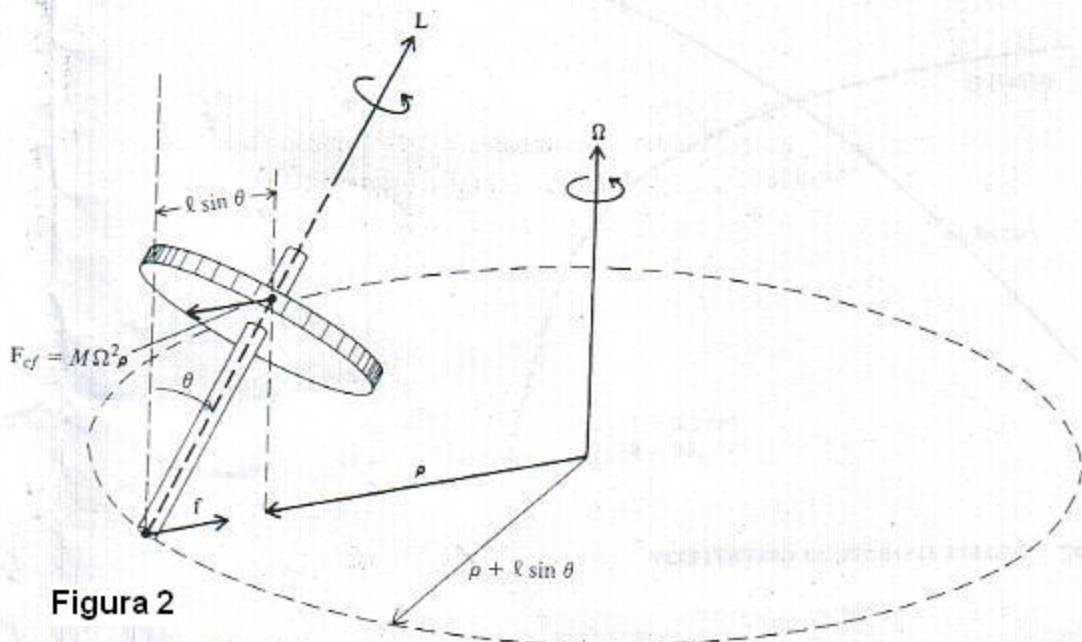
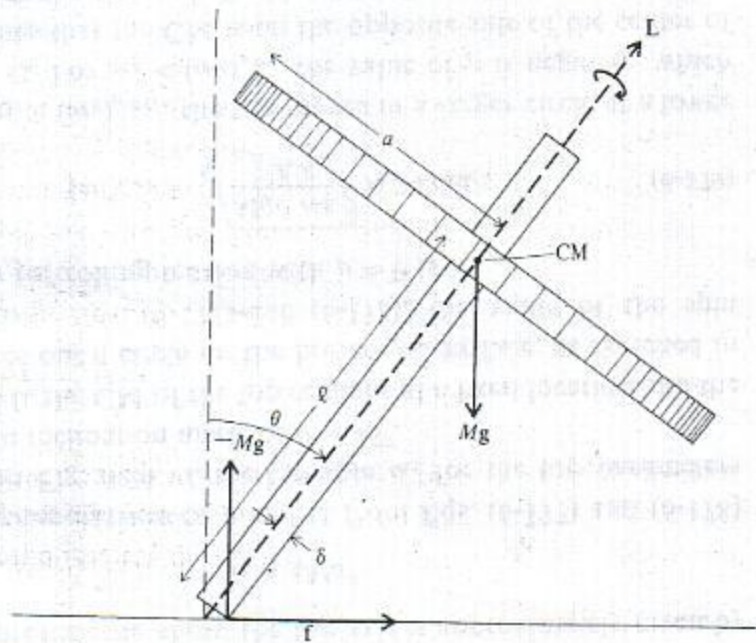


Figura 2

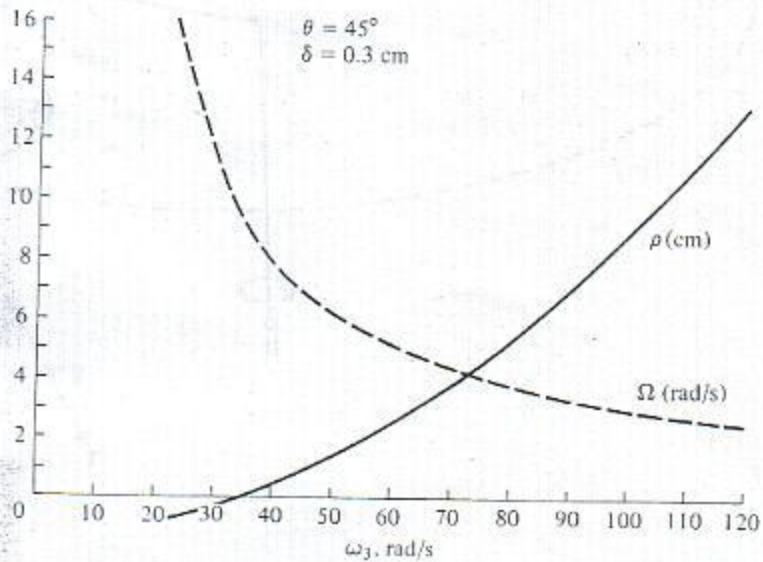


Figura 3



P3] Este problema se los debta de antes.

→ Hallar la energía cinética de un elipsoide homogéneo que gira alrededor de un de sus ejes (AB en la figura), a la vez que este eje gira alrededor de la perpendicular CD que pasa por el centro del elipsoide.

Sol.:

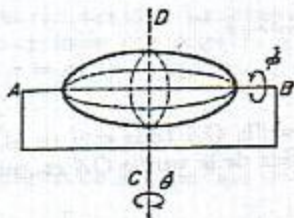


Fig. 1

Como el elipsoide es homogéneo, su CM se ubica en su centro geométrico que se encuentra en reposo, de modo que la energía cinética de traslación es nula (la velocidad del CM es nula). Concentrémonos entonces en el cálculo de la energía cinética de rotación.

Sabemos que la energía cinética de rotación viene dada por:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \mathbb{I}_{cm} \vec{\omega}$$

$\mathbb{I}_{cm}$  toma forma diagonal en la base de los ejes principales de inercia ( $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ )

$$\mathbb{I}_{cm} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

En el caso del elipsoide, los 3  $I_i$  son diferentes entre sí. ¿Sabemos qué es un elipsoide? Si pensaban que era el cuerpo que se obtiene de hacer girar una elipse en torno a uno de sus ejes, están equivocados. Las secciones o cortes perpendiculares a  $\vec{AB}$  de nuestro elipsoide son elipses!! Por estos los momentos de inercia  $I_i$  son todos diferentes.

La simetría nos dicta las direcciones de los  $\hat{e}_i$ . Ubiquemos  $\hat{e}_3$  a lo largo de  $\vec{AB}$  y si hacemos un corte a nuestro elipsoide, perpendicularmente a  $\vec{AB}$  y que pase por el CM obtenemos:

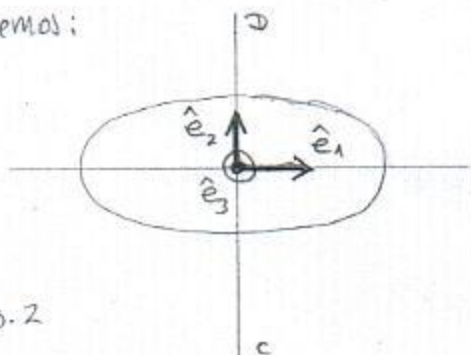


Fig. 2

$\hat{e}_3$  está saliendo de la hoja.

Ahora que ya encontramos la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$  en la que  $\mathbb{I}_{cm}$  es diagonal, debemos escribir la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del elipsoide en esta misma base.

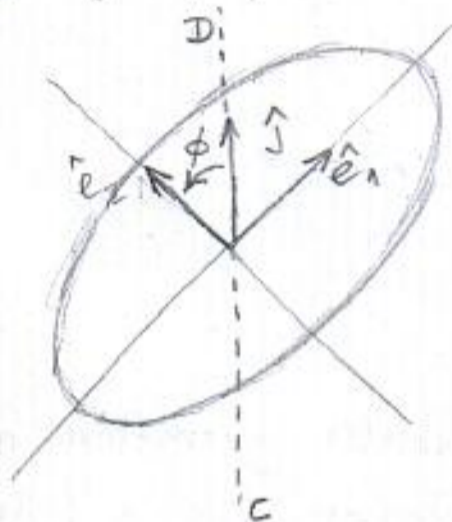
Previamente escribiremos  $\vec{\omega}$  en la base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . En la Figura 4 el eje  $Z$  corresponde a  $\vec{AB}$ , el eje  $Y$  a  $\vec{CD}$ . Recordando que las velocidades angulares afortunadamente se suman vectorialmente:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{j} + \dot{\phi} \hat{k}$$

Nuestra tarea ahora consiste en proyectar  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ . Trivialmente

$$\hat{k} = \hat{e}_3$$

Para proyectar  $\hat{j}$  inspirémonos en la siguiente figura:



$$\Rightarrow \hat{j} = \sin\phi \hat{e}_1 + \cos\phi \hat{e}_2$$

Fig. 3

Luego:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} [\sin\phi \hat{e}_1 + \cos\phi \hat{e}_2] + \dot{\phi} \hat{e}_3 \\ &= \dot{\theta} \sin\phi \hat{e}_1 + \dot{\theta} \cos\phi \hat{e}_2 + \dot{\phi} \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin\phi \\ \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin\phi \\ \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [ I_1 \dot{\theta}^2 \sin^2\phi + I_2 \dot{\theta}^2 \cos^2\phi + I_3 \dot{\phi}^2 ]$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 [ I_1 \sin^2\phi + I_2 \cos^2\phi ] + \frac{1}{2} I_3 \dot{\phi}^2$$

Finalmente la energía cinética:

$$T = T_{tras} + T_{rot}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 [ I_1 \sin^2\phi + I_2 \cos^2\phi ] + \frac{1}{2} I_3 \dot{\phi}^2$$