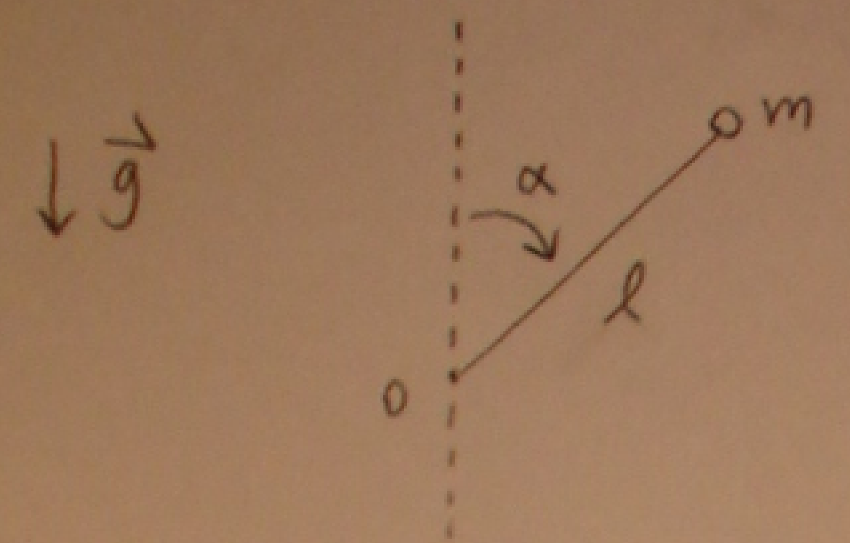
PAUTA EJERCICIO 4

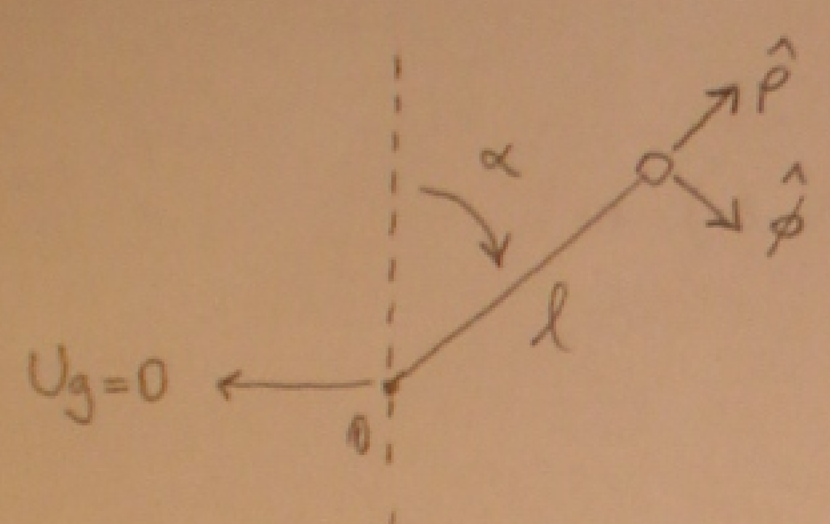


La masa m tiene 2 restricciones, debe estar en el plano de la hoja y a una distancia fija ℓ del punto 0. Luego hay un solo grado de libertad $(3-2=1)$ y la coordenada generalizada que usaremos es α.

(a) Para escribir el Lagrangeano utilizamos coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) donde $\phi = \alpha$.

↳ no es restricción es sólo un cambio de nombre

La posición de la masa m:



$$\vec{r} = \ell \hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \ell \dot{\phi} \hat{\phi}$$

Pero dijimos que $\alpha = \phi \Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\phi}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \ell \dot{\alpha} \hat{\phi}$$

Así $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = (\ell \dot{\alpha} \hat{\phi}) \cdot (\ell \dot{\alpha} \hat{\phi}) = \ell^2 \dot{\alpha}^2 \underbrace{\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}}_{1} = \ell^2 \dot{\alpha}^2$

Con esto la energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2$$

La energía potencial es sólo debida a la energía potencial gravitatoria y con la elección del nivel cero mostrada en el dibujo:

$$V = U_g = mg\ell\cos\alpha$$

Finalmente el Lagrangeano: $\quad L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 - mg\ell\cos\alpha$

(b) En esta parte tendremos que utilizar nuestros conocimientos de Mecánica: DCL y $m\vec{a} = \vec{F}$.
Pero antes de eso obtengamos la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada α.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m\ell^2 \dot{\alpha} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) = m\ell^2 \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = mg\ell \operatorname{sen}\alpha$$

Luego la ecuación es: $\quad m\ell^2 \ddot{\alpha} - mg\ell \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad / \frac{1}{m\ell^2}$

$$\ddot{\alpha} - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad (1)$$

Intégremosla una vez siguiendo la sugerencia:

$$\ddot{\alpha} - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad / \dot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha}\dot{\alpha} - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}\alpha \, \dot{\alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\cos\alpha\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\alpha\right) = 0$$

Luego $\quad \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\alpha = A \quad , A$ constante

Para calcular A evaluamos en la condición inicial $\dot{\alpha}(t=0)=0 \quad , \alpha(t=0)=\alpha_0$

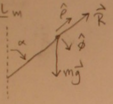
$$\frac{g}{\ell}\cos\alpha_0 = A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\alpha = \frac{g}{\ell}\cos\alpha_0$$

$$\dot{\alpha}^2 = 2\frac{g}{\ell}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) \qquad (2)$$

Ahora, volvamos a Mecánica:

DCL



$$\sum \vec{F} = R\hat{\rho} - mg\cos\alpha\,\hat{\rho} + mg\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{\phi}$$

La aceleración en cilíndricas, en este caso ($\phi=\alpha$, $\rho=\ell$) es:

$$\ddot{\vec{r}} = \ell\ddot{\alpha}\hat{\phi} - \ell\dot{\alpha}^2\hat{\rho}$$

La 2ª Ley de Papi Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}$$

Obtenemos las siguientes 2 ecuaciones escalares de movimiento:

$\hat{\rho}\rfloor \quad -m\ell\dot{\alpha}^2 = R - mg\cos\alpha$

$\hat{\phi}\rfloor \quad m\ell\ddot{\alpha} = mg\,\text{sen}\,\alpha \qquad \rightarrow$ esta ecuación la obtuvimos por Euler-Lagrange; la (1)

De la ecuación para $\hat{\rho}\rfloor$:

$$R = -m\ell\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha$$

Y sustituyendo con (2):

$$R(\alpha) = -m\ell\, 2\frac{g}{\ell}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + mg\cos\alpha$$

$$R(\alpha) = -2mg\cos\alpha_0 + 3mg\cos\alpha$$

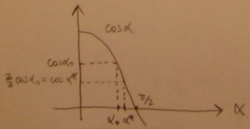
$$R(\alpha) = mg\left[3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0\right]$$

La fuerza $\vec{R}$ cambia de compresión a tensión cuando cambia de sentido, es decir, pasa de apuntar en $\hat{\rho}$ a $-\hat{\rho}$. Este cambio es continuo y ocurre en un ángulo α^* tal que $R(\alpha^*)=0$.

Luego $\quad R(\alpha^*)=0 \iff mg\left[2\cos\alpha_0 - 3\cos\alpha^*\right]=0$

$$\iff \cos\alpha^* = \frac{2}{3}\cos\alpha_0$$

Como $\alpha_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha_0 \in [0,1] \Rightarrow \cos\alpha^* = \frac{2}{3}\cos\alpha_0 \in [0,1] \Rightarrow \alpha^* \in [0,\frac{\pi}{2}]$



Del dibujito vemos que $\alpha^* \in (\alpha_0, \frac{\pi}{2})$

Entonces la fuerza $\vec{R}$, para esta condición inicial, pasa de compresión a tensión en un ángulo $\alpha^* < \frac{\pi}{2}$, o sea, antes de que la masa pase a la "mitad de abajo"