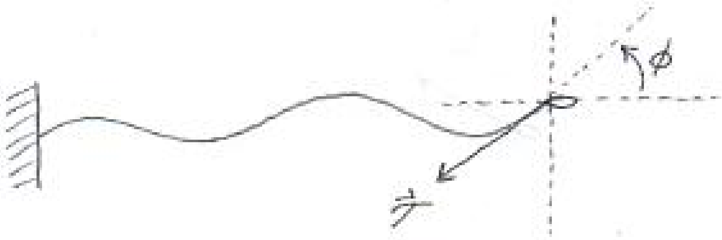
PAUTA EJERCICIO 6

(i) La velocidad con que se propaga una perturbación pequeña es:

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{40\,[N]}{0{,}05\,[Kg\,m^{-1}]}} = 20\sqrt{2}\,\left[\frac{m}{s}\right]$$ 1,0

(ii)



La figura de arriba muestra un DCL del anillo sin masa. Aplicando la 2ª ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \qquad (m = 0)$$

La componente vertical de esta ecuación es:

$$-\tau \operatorname{sen}\phi = 0$$

En realidad $\phi \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi \approx tg\phi = \frac{\partial u}{\partial x}(x = 2m, t)$. Luego:

$$-\tau \frac{\partial u}{\partial x}(x=2m,t) = 0 \quad \forall t$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x=2m,t) = 0 \quad \forall t$$ 2,0

(iii) Buscamos soluciones tipo modo normal para la ecuación de ondas

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condiciones de borde:

$$u(0,t) = 0 \qquad \forall t \qquad (L = 2m)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x=L,t) = 0$$

Los modos normales son de la forma $u(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \phi)$. Sustituyéndola en la ecuación de ondas y usando las C.B. obtendremos lo pedido..

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A(x)\,\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A''(x)\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad -A(x)\frac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t + \phi) = A''(x)\cos(\omega t + \phi) \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \quad A''(x) + K^2 A(x) = 0 \qquad ; \quad K^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}$$

La solución de esta EDO:

$$A(x) = A_1 \cos(Kx) + A_2 \operatorname{sen}(Kx)$$

Para los modos normales, las C.B. se tradscen en:

$$0 = u(0,t) = A(0)\cos(\omega t+\phi) \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad A(0)=0$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = A'(L)\cos(\omega t+\phi) \ \forall t \Rightarrow \quad A'(L)=0$$

Con la primera C.B.:

$$0 = A(0) = A_1\cos(K\cdot 0) + A_2 \operatorname{sen}(K\cdot 0) = A_1$$

$$\Rightarrow A(x) = A_2 \operatorname{sen}(Kx)$$

$$\Rightarrow A'(x) = A_2 K \cos(Kx)$$

Con la segunda C.B.:

$$0 = A'(L) = A_2 K\cos(KL) \quad \Rightarrow \quad \cos(KL) = 0$$

($K=0 \vee A_2=0 \Rightarrow A(x)\equiv 0$ y no nos interesa esta solución trivial)

$$\Leftrightarrow \quad KL = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad n\in \mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$$

$$\therefore \quad K_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \qquad n\in\mathbb{N}_0$$

Luego los modos normales son:

$$u_n(x,t) = A_2(n)\operatorname{sen}(K_n x)\cos(\omega_n t+\phi_n) \quad ; \ \omega_n = cK_n$$

2,0

$A_2(n)$ y ϕ_n se determinan a partir de las condiciones iniciales.

(iv) En el caso que haya una masa puntual m en el extremo libre, la condición de borde se modifica a:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x=2m,t) = -\tau\frac{\partial u}{\partial x}(x=2m,t) \qquad \forall t$$

1,0