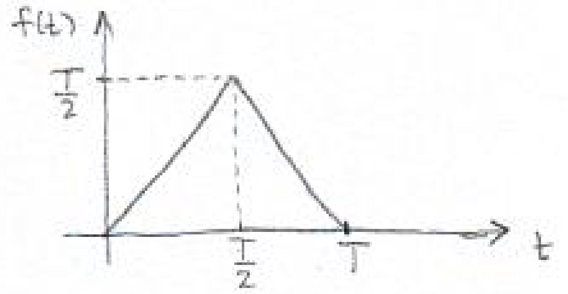
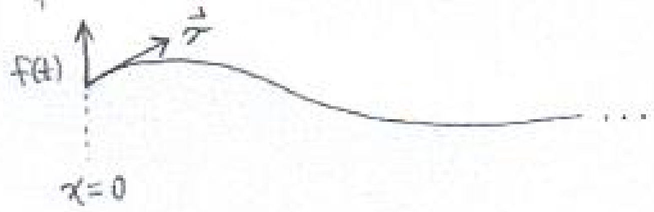
30/10/2K+7

P1 Considere una cuerda semiinfinita (tiene sólo un borde o extremo). Su borde se encuentra forzado por una fuerza vertical dependiente del tiempo con módulo $f(t)$. Encuentre la perturbación $u(x,t)$ en función de $f(t)$ en forma general y para el caso particular:



Solución:

Las perturbaciones que se propagan por la cuerda satisfacen la ecuación de ondas $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
Para poder obtener la perturbación que generará la fuerza vertical, debemos determinar una condición de borde en el único borde que admite nuestra cuerda semiinfinita.



La componente vertical de la ecuación de movimiento ($\vec{F} = m\vec{a}$) para el extremo (sin masa) de la cuerda es:

$$0 = \tau \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + f(t) \qquad \forall t \in [0,\infty) \qquad (\tau = cte)$$

$$\text{C.B.} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{\tau} f(t) \qquad \forall t \in [0,\infty) \qquad (1)$$

Tomaremos como condición inicial:

$$\text{C.I.} \begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \forall x \in [0,\infty) \qquad (2)$$

Producto de la fuerza vertical de módulo $f(t)$, se generará una onda viajera hacia la derecha. Como la cuerda se extiende infinitamente hacia la derecha, no tiene donde rebotar y como la condición inicial es la de una cuerda quieta, no hay por dónde aparezca una onda viajera hacia la izquierda.

Recordando la solución de D'Alembert para la ecuación de ondas, en nuestro caso será:

$$u(x,t) = u(x-ct) \qquad \text{(onda viajera hacia la derecha)}$$

Remark Matemático 1

Consideremos la función $u = u(\underbrace{x-ct}_{\alpha})$; $\alpha = x - ct$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial \alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = -\frac{1}{\tau} f(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{c}{\tau} f(t) \qquad / \int_0^t$$

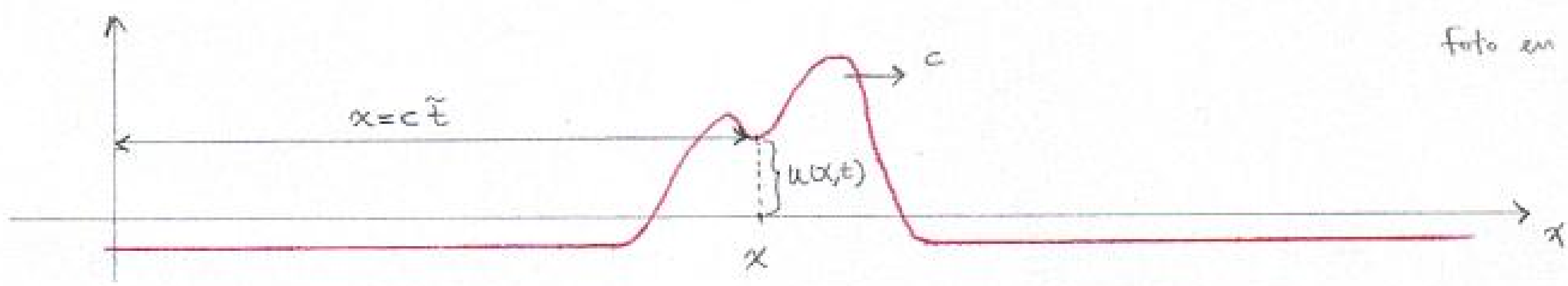
$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t'}(0,t')\,dt' = \frac{c}{\tau}\int_0^t f(t')\,dt'$$

$$u(0,t) - u(0,0) = \frac{c}{\tau}\int_0^t f(t')\,dt' \qquad \wedge \quad \text{por} \quad (2) \quad u(0,0)=0$$

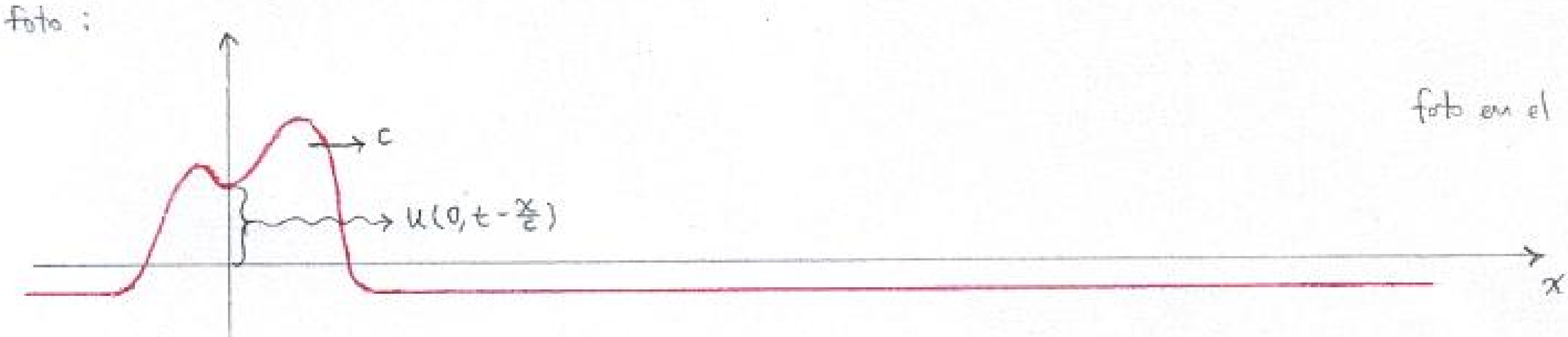
$$\Rightarrow u(0,t) = \frac{c}{\tau}\int_0^t f(t')\,dt' \qquad (4)$$

Hasta ahora hemos obtenido sólo $u(0,t)$ en función de $f(t)$ (ecuación (4)), pero nosotros queremos $u(x,t)$. A continuación deduciremos una simple relación entre $u(x,t)$ y $u(0,t')$, algún t' por determinar.

Consideremos que en nuestra cuerda hay una perturbación que viaja hacia la derecha (obviamente con velocidad de propagación c); en el instante de tiempo "t" se toma una foto de la cuerda y se observa el siguiente perfil en la cuerda:



En la foto se muestra la perturbación viajera a la que se le ha destacado un punto característico (el mínimo local). La posición de la cuerda en dicha coordenada x para el tiempo de la foto (t) es $u(x,t)$. Esta perturbación se ha estado desplazando hacia la derecha desde tiempos previos, sin cambiar de forma. En particular, el mínimo local que hemos destacado se ubicó antes en la posición $x=0$. Como la velocidad de propagación es c, se tardó un tiempo $\tilde{\tau} = \frac{x}{c}$ en desplazarse desde $x=0$. Es decir, en el instante de tiempo $t - \tilde{\tau} = t - \frac{x}{c}$, este mínimo local se ubicaba en el origen como lo muestra la siguiente foto:



La posición de la cuerda en la coordenada $x=0$ en el tiempo de la foto es $u(0,t-\frac{x}{c})$. Pero este desplazamiento de la cuerda, ya que la perturbación se propaga sin cambiar de forma, debe coincidir con el correspondiente desplazamiento en el tiempo t, es decir:

$$u(0,t-\tfrac{x}{c}) = u(x,t)$$ ya que nos referimos al mismo punto de la perturbación, su mínimo local.

El razonamiento anterior se puede aplicar a cualquier punto de la perturbación (sólo por conveniencia se eligió el mínimo local) en cualquier instante t de tiempo, así que podemos concluir:

$$(5) \qquad u(x,t) = u(0,t-\tfrac{x}{c}) \qquad \forall x \text{ donde exista cuerda}, \quad \forall t \in [0,\infty)$$

en nuestro caso de cuerda semiinfinita $x \in [0,\infty)$

Miremos con otros ojos la ecuación (4):

$$u(0,t) = \frac{c}{\tau}\int_0^t f(t')\,dt'$$

es función de la variable t

es función de la variable t que aparece en el límite superior de la integral

Luego si yo les pidiera: evalúen $u(0,34)$, ustedes me deberían responder

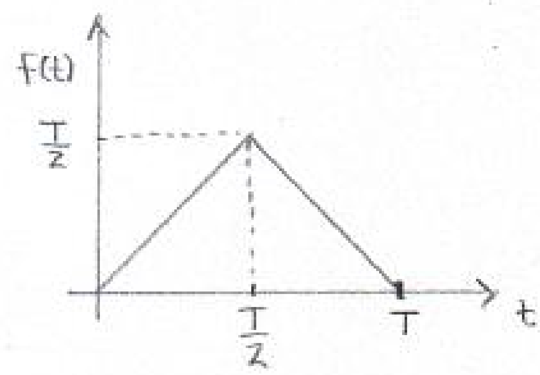
$$u(0,34) = \frac{c}{\tau}\int_0^{34} f(t')\,dt'$$

Habiendo dejado en claro esto, resulta fácil ver que sustituyendo (4) en (5) obtenemos lo buscado:

$$u(x,t) = u\left(0, t-\frac{x}{c}\right) = \frac{c}{\tau}\int_0^{t-\frac{x}{c}} f(t')\,dt'$$

$$\therefore\quad u(x,t) = \frac{c}{\tau}\int_0^{t-\frac{x}{c}} f(t')\,dt' \qquad (6)$$

Concentrémonos ahora en el caso particular:



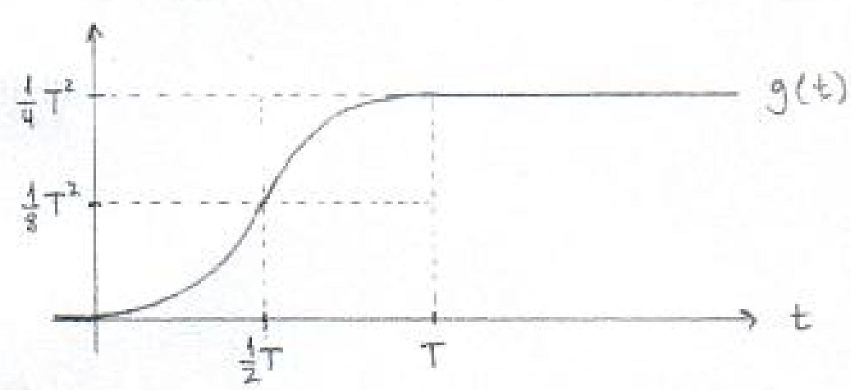
(En la legal deberíamos poner una constante con dimensiones $\left[\frac{N}{s}\right]$ para ajustar las dimensiones de $f(t)$, pero por comodidad de cálculo no lo haremos)

Remark Matemático 2

Nos será útil calcular $g(t) \equiv \int_0^t f(t')\,dt'$ para la función $f(t)$ del gráfico de arriba. Teniendo cuidado, i.e., notando que hay 4 pedazos bien distinguidos ($(-\infty,0]$, $[0,\frac{T}{2}]$, $[\frac{T}{2},T]$ y $[T,\infty)$) obtenemos:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t\in(-\infty,0] \\ \frac{1}{2}t^2 & t\in[0,\frac{T}{2}] \\ \frac{1}{4}T^2 - \frac{1}{2}(T-t)^2 & t\in[\frac{T}{2},T] \\ \frac{1}{4}T^2 & t\in[T,\infty) \end{cases}$$

Gráficamente:



Luego, para este $f(t)$ particular,

$$u(x,t) = \frac{c}{\tau}\,g\left(t-\frac{x}{c}\right) = \begin{cases} 0 & t-\frac{x}{c}\in(-\infty,0] \iff x\in[ct,\infty) \\ \frac{1}{2}\frac{c}{\tau}\left(t-\frac{x}{c}\right)^2 & t-\frac{x}{c}\in[0,\frac{T}{2}] \iff x\in[c(t-\frac{T}{2}),ct] \\ \frac{c}{\tau}\left[\frac{1}{4}T^2 - \frac{1}{2}\left(T-\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)^2\right] & t-\frac{x}{c}\in[\frac{T}{2},T] \iff x\in[c(t-T),c(t-\frac{T}{2})] \\ \frac{1}{4}\frac{c}{\tau}T^2 & t-\frac{x}{c}\in[T,\infty) \iff x\in[0,c(t-T)] \end{cases}$$

Por ejemplo, ¿cuál será el perfil de la cuerda para $t=2T$? Esto corresponde a encontrar $u(x,2T)\ \forall x\in[0,\infty)$.

$$u(x,2T) = \begin{cases} 0 & x\in[2cT,\infty) \\ \frac{1}{2}\frac{c}{\tau}\left(2T-\frac{x}{c}\right)^2 & x\in[\frac{3}{2}cT, 2cT] \\ \frac{c}{\tau}\left[\frac{1}{4}T^2 - \frac{1}{2}\left(T-\left(2T-\frac{x}{c}\right)\right)^2\right] & x\in[cT,\frac{3}{2}cT] \\ \frac{1}{4}\frac{c}{\tau}T^2 & x\in[0,cT] \end{cases}$$

Su gráfico:

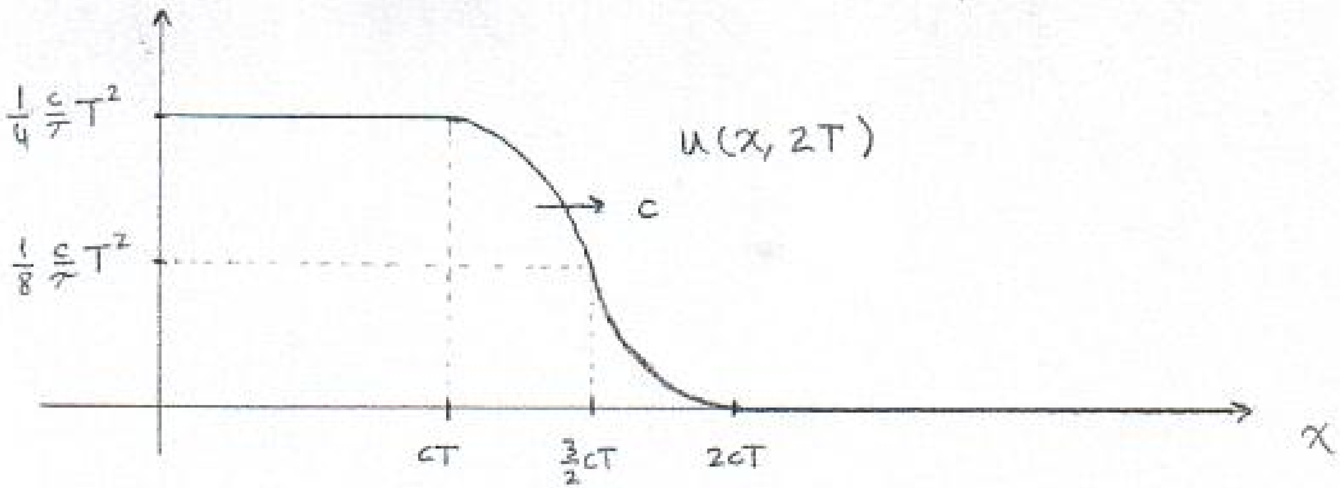


foto en el instante $t = 2T$

La perturbación viaja hacia la derecha con velocidad c.