Problema 3 Control 3

Prof. Claudio Romero Prof. Aux. Patricio Cubillos, Sebastián Diaz

15 de noviembre de 2007

Problema 1:

a. Encontre 2 formas de responder esta parte:

i. Sea s(x,t) la funcion desplazamiento de las particulas en el medio, por enunciados es una onda armonica de amplitud A, presion es p=P_0+P_e(x,t); densidad es $\rho = \rho_0 + \rho_e$(x,t):

$$s(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

Sea S el area de la cañeria entonces la potencia eta dada por:

$$J = -F\big|_0 (\frac{\partial s}{\partial t})(\frac{\partial s}{\partial x}) \tag{2}$$

Pero la fuerza es Presion $\times$ Area, y lo que nos interesa es Intensidad=J/Area, luego:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial s}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t) \\
& \frac{\partial s}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t) \\
\Rightarrow \quad & I = \frac{J}{S} = \frac{-P_0 S}{S}(-\omega k A^2)\sin^2(kx - \omega t) \\
\Rightarrow \quad & I = P_0 \omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

Claramente un ciclo se cumple en T=$2\pi/\omega$, con lo que la intensidad promedio es:

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= \frac{1}{T}\int_0^T I dt \\
&= \frac{P_0 \omega k A^2}{T}\int_0^T \sin^2(kx - \omega t)dt \\
&= \frac{P_0 \omega k A^2}{T}\frac{1}{2}\int_0^T (1 - \cos(2kx - 2\omega t))dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_0\omega k A^2}{2T}(T+\sin^2(kx-\omega t)\big|_0^T) \\
&= \frac{P_0\omega k A^2}{2T}(T+\sin^2(kx-2\pi)-\sin^2(kx)) \\
&= \frac{P_0\omega k A^2}{2T}T \\
\overline{I} &= \frac{P_0\omega k A^2}{2}
\end{aligned}$$

La densidad del aire esta relacionada con la presion segun, $P_0 = c^2\rho_0$ y k=ω/c entonces:

$$\overline{I} = \frac{c\rho_0\omega^2 A^2}{2} \tag{3}$$

ii. La otra forma:
Potencia= fuerza $\times$ velocidad, y usando las relaciones que se dan para ondas de sonido:$P_e = c^2\rho_e$ y $\rho_e = -\rho_0\partial s/\partial x$, se tiene:

$$\begin{aligned}
& P_e = -c^2\rho_0\frac{\partial s}{\partial x} \\
\Rightarrow \quad & \text{Intensidad} = \frac{\text{Potencia}}{S} \\
\Rightarrow \quad & \text{Intensidad} = -c^2\rho_0\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial t}
\end{aligned}$$

Con lo que hemos recuperado la formula anterior.

b. Esto es identico a lo visto en clase aux. Onda incidente:

$$s_i(x,t) = Re\left\{Ae^{i(kx-\omega t)}\right\} \qquad x < a \tag{4}$$

Como consecuencia apareceran ondas reflejada y transmitida:

$$\begin{aligned}
s_r(x,t) = Re\left\{Be^{-i(k_r x+\omega_r t)}\right\} \qquad x < a \\
s_t(x,t) = Re\left\{Ce^{i(k_t x-\omega_t t)}\right\} \qquad x > a
\end{aligned}$$

y se tienen las condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
[s_i + s_r]\big|_{x=a} &= s_t\big|_{x=a} \\
\left[\frac{\partial s_i}{\partial x} + \frac{\partial s_r}{\partial x}\right]\Big|_{x=a} &= \frac{\partial s_t}{\partial x}\Big|_{x=a}
\end{aligned}$$

Ahora, como estas condiciones se cumplenm para todo tiempo, las frecuencias ω's tienen necesariamente que ser iguales ya que si no distintas componentes oscilarian con frecuencias distintas y ya no se satisfacerian las condiciones de borde, por lo qie se deduce ademas que $k_r = k$ y $k_t = 2k$ ($\omega = ck$), luego de las condiciones de borde se tiene respectivamente:

$$\begin{aligned}
Ae^{ika} + Be^{-ika} &= Ce^{i2ka} \\
Ae^{ika} - Be^{-ika} &= 2Ce^{i2ka}
\end{aligned}$$

De lo que se puede deducir:

$$B = \frac{-1}{3} A e^{i2ka}$$

Ahora apoyandose de la parte a.

$$I_r = Re\left\{ -c^2 \rho_0 \frac{\partial s_r}{\partial x} \frac{\partial s_r}{\partial t} \right\} \tag{5}$$

entonces:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{c\rho_0 \omega^2 |B|^2/2}{c\rho_0 \omega^2 A^2/2}$$
$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1}{9}$$

c. La variacion en temperatura esta dada por:

$$T_e = P_e \frac{\partial T}{\partial P} \tag{6}$$

La derivada se obtiende de la ecuacion de gas ideal:

$$T(V, P) = \frac{PV}{nR} \tag{7}$$

Lo que depende del volumen tambien, asi que usamos la ecuacion para un proceso adiabatico:

$$\begin{aligned} & V = Cte^{1/\gamma} \cdot P^{-1/\gamma} \\ \Rightarrow \quad & T(P) = \frac{Cte^{1/\gamma} \cdot P^{1-1/\gamma}}{nR} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial T}{\partial P} = (1 - 1/\gamma) \frac{Cte^{1/\gamma} \cdot P^{-1/\gamma}}{nR} \end{aligned}$$

Ahora solo falta conocer la cte, lo que se puede conocer solo con evaluar en P_0 y T_0:

$$\begin{aligned} V_0 &= Cte^{1/\gamma} \cdot P_0^{-1/\gamma} \\ \frac{nRT_0}{P_0} &= Cte^{1/\gamma} \cdot P_0^{-1/\gamma} \\ \Rightarrow Cte^{1/\gamma} &= nRT_0 \cdot P_0^{1/\gamma - 1} \end{aligned}$$

Asi que, la variacion es:

$$\begin{aligned} T_e &= P_e \cdot (1 - 1/\gamma) \frac{nRT_0 \cdot P_0^{1/\gamma-1} \cdot P^{-1/\gamma}}{nR} \\ T_e &= P_e \cdot (1 - 1/\gamma) T_0 P_0^{-1} \\ T_e &= -c^2 \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} \cdot (1 - 1/\gamma) T_0 P_0^{-1} \\ T_e &= c^2 \rho_0 A k \cdot \sin(kx - \omega t)(1 - 1/\gamma) T_0 P_0^{-1} \end{aligned}$$

$\boxslash$