Mecánica del Continuo y Ondas Fi31B

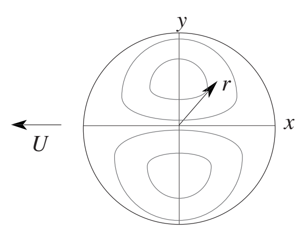
Tarea 10

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Jocelyn Dunstan y Pablo Gutiérrez

Problema 35 Vórtice de Hill a 2D

Sea la siguiente distribución de vorticidad en coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z$): $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$, con $\omega_z = Ar\sin\theta$ si $r < a$ y $\omega_z = 0$ si $r > a$. Además se tiene que la velocidad es nula en infinito.



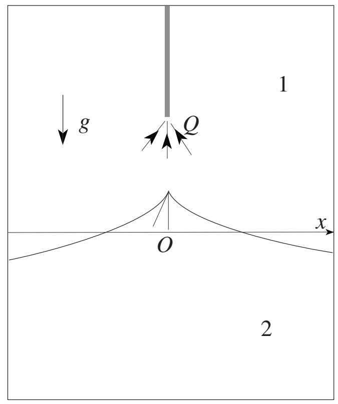
i) Así como se calculó a tres dimensiones espaciales, calcule ahora la función corriente en todo el espacio.

ii) El disco $r = a$ es una región de discontinuidad en la vorticidad, sin embargo la velocidad debe ser continua, establezca entonces las condiciones para determinar las constantes libres en ψ calculado en *i)* .

iii) Muestre que la función corriente para $r > a$ coincide con la del flujo alrededor de un disco que se mueve con velocidad uniforme U, encuentre dicha velocidad.

Problema 36

Se tienen dos fluidos 1&2 con densidades ρ_1 y ρ_2 y viscosidades ν_1 y ν_2, bajo la acción del campo gravitatorio. Naturalmente en equilibrio la interfase es un plano horizontal. En el fuido 1, el más ligero, se introduce un tubito, a una distancia h de la interfase 1-2 (línea horizontal) que pasa por O, que aspira el fluido 1 con un caudal Q. Como resultado se observa una deformación ζ de la interfase entre los dos líquidos y el fluido 2 permanece en reposo.



i) Encuentre un expresión general (usando análisis dimensional) para esta deformación como función de la posición x.

ii) Asumiremos ahora que se trata de dos fluidos perfectos (sin tension de superficie) en ausencia de vorticidad. Derive a partir de las ecuaciones de los fluidos una relación entre la deformación ζ de la interfase y el campo de velocidades del fluido 1. Encuentre la ecuación para el campo de velocidades del fluido 1. Derive una formula asintótica para esta deformación lejos de O. Comente.

iii) Justo debajo del tubito es razonable de suponer que la interfase puede crear una singularidad en forma angulosa. Explique como se puede calcular dicho águlo. Como no es posible de obtener un resultado simple en tres dimensiones espaciales, encuentre el valor de este ángulo a 2D.

iv) Considerando *ii)* & *iii)* Cuál le parece es la causa que deforma la superficie.

Problema 37

Determine numéricamente la solución de la ecuación diferencial para la solución auto-similar de Prandtl

$$f'''(\zeta) = \frac{1}{2} f(\zeta) f''(\zeta)$$

que satisface las condiciones de borde $f(0) = f'(0) = 0$ y $f'(\infty) = 1$. Para ello grafique $f'(\zeta)$ vs. ζ para diferentes valores de $f''(0)$ y encuentre el valor particular $f''(0)$ tal que $f'(\zeta) \to 1$ para $\zeta \gg 1$.

Problema 38

Encuentre el potencial de velocidades, la velocidad tangencial en función de la posición x, ya la posicin al valor máximo de ella, para los perfiles delgados $h(x) = \epsilon T(x)$ ($\epsilon \ll 1$)siguientes:

i) $T(x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$ y $T(x) = 0$, $|x| \geq 1$.

ii) $T(x) = \sqrt{1+x}(1-x)^{3/2}$, $|x| \leq 1$ y $T(x) = 0$, $|x| \geq 1$.

Problema 39

Determinar el potencial de velocidades en todo el espacio para un flujo levemente compressible alrededor de una esfera.

La ecuación a resolver es:

$$\nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{2}(1 - (\nabla\phi)^2) \right) \nabla\phi \right) = \frac{\gamma - 2}{2} \left((\nabla\phi)^2 - 1 \right) \nabla^2\phi,$$

luego considere la serie en número de Mach

$$\phi = \phi_0 + M^2\phi_1 + M^4\phi_2 + \ldots .$$

Determine el coeficiente v_1 de la serie para la velocidad en el meridiano $\theta = \pi/2$:

$$v(\pi/2) = 3/2 + v_1 M^2 + \ldots .$$

Problema 40

A dos dimensiones espaciales, funciones analíticas en variable compleja simplifican notablemente algunos cálculos. Sea $\phi(x,y)$ el potencial de velocidades ($\vec{v}(x,y) = \vec{\nabla}\phi(x,y)$) y sea la función analítica $f(z = x + iy) = \phi + i\psi$.

a) Muestre que la velocidad compleja es $w = v_x - iv_y = \frac{df}{dz}$.

b) Muestre que, además de la conocida relación $v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ y $v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, tenemos también $v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ y $v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$. Existe, entonces, una relación entre ϕ y ψ, estas se llaman relaciones de Cauchy–Riemann.

c) Muestre que las líneas iso-ϕ e iso-ψ son ortogonales. Luego las iso-ψ son paralelas a la corriente del flujo, de ahí el nombre de ψ "función corriente" (*"stream-function"*). Muestre además que, vía las relaciones de Cauchy–Riemann, ψ es uniforme en la frontera.

Sea $w = e^{\tau} e^{-i\theta}$

d) Demuestre que la ecuación para una interfase libre (donde p es uniforme) de un fluido perfecto irrotacional en presencia de un campo gravitatorio uniforme (gy) es:

$$\frac{1}{2}|w|^2 + gy = cte$$

e) Usando el cambio de variables $dz = \frac{d(\phi+i\psi)}{w}$ muestre que

$$e^{3\tau}\frac{d\tau}{d\phi} = -g\sin\theta,$$

(Levi-Civita, 1907) en el curso veremos algunas aplicaciones de esta teoría.

Entrega Viernes 7 de diciembre en Secretaria Docente