Teoría de Carteras

2007 J. Miguel Cruz

Ejemplo Variable Aleatoria: Tipo de Cambio

Estadísticas sobre una variable aleatoria

- **Media**
  E(x) y se estima (1/T)(x1+x2+…xT) $\mu = \frac{1}{T}\cdot\sum_{i=1}^{i=T} x_i$
- **Varianza**
  V(x) o σ^2(x) y se define E(x [2])-[E(x)] [2] $\sigma^2 = \frac{1}{(T-1)}\cdot\sum_{i=1}^{i=T}(x_i-\mu)^2$
- **Desviación Estándar**
  Dispersión medida en las mismas unidades que la variable original. σ(x) $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2(x)}$
- **Otras**
  - Mínimo
  - Máximo
  - Mediana
  - ...

Aproximación usada en finanzas

Para pequeños intervalos de tiempo, el cambio porcentual es equivalente al logaritmo del retorno.

Modelo Multiplicativo

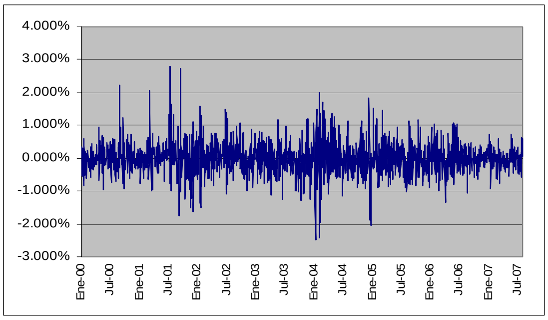
$$\frac{\tilde{P}_{t+1} - P_t}{P_t} \approx Ln\left(\frac{\tilde{P}_{t+1}}{P_t}\right) = \tilde{\varepsilon}_t$$

$$\varepsilon_t \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

Estimación de Parámetros

- **Objetos de análisis** $r_t = Ln\left(\frac{\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_{t-1}}\right)$
- **Volatilidad** $\sigma = \text{DesvEst}\left\{Ln\left(\frac{\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_{t-1}}\right)\right\}$
- **Media o Tendencia**
- **¿Es una buena estimación?** $\mu = \text{E}\left\{Ln\left(\frac{\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_{t-1}}\right)\right\}$

Ejemplo: Retornos Log diarios del Tipo de Cambio



Volatilidad

- **Concepto de volatilidad:**
  - **mide las desviaciones pasadas respecto de la media o tendencia**
  - **Se calcula como la desviación estándar de los cambios porcentuales de las tasas**
  - **Tiene asociado un período (diaria, mensual, anual)**
  - **Generalmente se calcula con ponderador mayor para la historia reciente**

Estimación de la volatilidad

- **Disponer de serie de tiempo**
- **Cálculo del retorno logarítmico (porcentual)**
- **Calcular desviación estándar:**
  - Directamente toda la muestra
  - Medias móviles
  - Estimación recursiva con ponderación histórica (λ=0,94)

Volatilidad crece con la raíz del tiempo

- **Supuesto es que la variable de riesgo tiene una distribución simple (sin autocorrelación) de varianza instantánea constante. Luego la varianza de t períodos es proporcional a t, y la volatilidad (desviación estándar) es entonces proporcional a la raíz de t.**

- **Si r(k) es el retorno k períodos hacia adelante entonces la varianza de r(k) es k veces la varianza de r.**

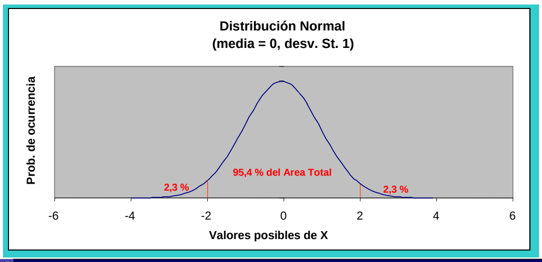
$$r_t(k) = r_t + r_{t+1} + r_{t+2} \ldots\ldots + r_{t+k-1}$$

La distribución normal

- **Simétrica: Probabilidad de subir es igual a la de bajar**
- **Movimientos en las cercanías del valor medio son mucho más probables: Un 68,3% de las posibles realizaciones se encuentran entre el valor medio +/- una desviación estándar. Este porcentaje se eleva a 95,4% para dos desviaciones estándares.**
- **Su fórmula es conocida, y es de fácil manejo analítico.**
- **"Aparece en la naturaleza" (Teorema Central del Límite**
  Suma de variables aleatorias iid tiende a una distribución normal)

Supuesto importante: retornos log tienen una distribución normal.

- **El argumento más usado es que si bien el retorno de activos no son exactamente normales, la distribución de grandes portafolios se acerca mucho a una normal.**



Cuando hay más de una variable aleatoria

Se debe estudiar la "Distribución de Probabilidad Conjunta"
La combinación de dos o más variables aleatorias tiene su propia distribución de probabilidad
Valor esperado de la suma = suma de los valores esperados

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Varianza de la suma = suma de las varianzas más 2 veces la covarianza entre las variables.

$$\sigma^2(X+Y)= \sigma^2(X)+ \sigma^2(Y)+2Cov(X,Y)$$

Varianzas y Covarianzas

Dos conceptos nuevos aparecen:

Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)

Corr(X,Y) = Cov(X,Y)/σ(X)σ(Y)= ρ_{XY}

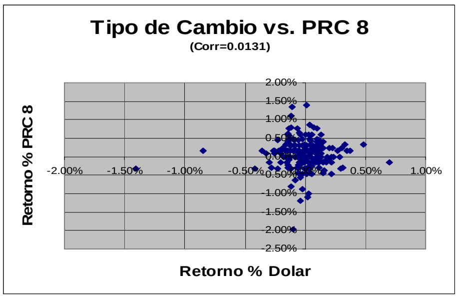
Ejemplo: Volatilidad PRC 8 años 0,482%
Volatilidad Tipo de Cambio 0,364%

Matriz de correlaciones: $\begin{bmatrix} 1 & 0{,}00410 \\ 0{,}00410 & 1 \end{bmatrix}$

Nota: Todas estas funciones están fácilmente disponibles en Excel

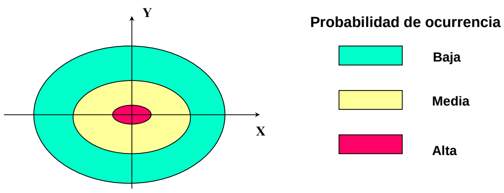
Ejemplo de Distribución multivariada

Ejemplo: Tipo de cambio y tasa PRC 8 años



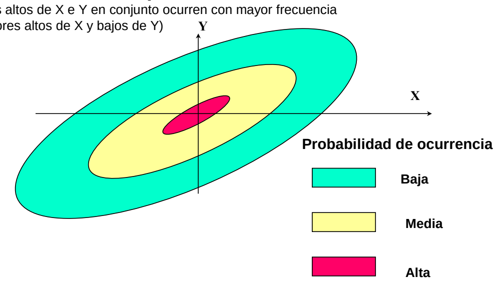
Distribución normal multivariada

- Suma de variables aleatorias normales es también normal (multiplicación de normales no es normal)
- Describen con una serie de valores esperados y una matriz de varianza-covarianza



Efecto correlación entre dos variables

Caso de correlación positiva entre X e Y
(Valores altos de X e Y en conjunto ocurren con mayor frecuencia que valores altos de X y bajos de Y)



Supuestos fundamentales para la incorporación del riesgo en la valorización de activos.

- Antes de comenzar a estudiar la incorporación del riesgo en la valorización de activos, debemos sentirnos cómodos con los siguientes supuestos el análisis:
  - Los inversionistas son aversos al riesgo
  - Utilizaremos la varianza (o desviación estándar) como instrumento para medir riesgo.
  - La distribución de los retornos tienen una distribución normal.

Fijando el horizonte de análisis, nos concentramos en N activos riesgosos

- Variable aleatoria es el retorno entre t y t+1 de los diferentes activos:

$$\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow N(\mathbf{R}_e, \Sigma)$$

donde *Re* es el vector de retornos esperados y Σ es la matriz varianza covarianza.

El vector de retornos aleatorios se define como:

$$[\tilde{\mathbf{R}}]_i = \tilde{r}_i = Ln(\frac{\tilde{P}_{i,t+1}}{P_{i,t}})$$

$$con\ [\mathbf{R}_e]_i = E(\tilde{r}_i),\ y\ [\mathbf{\Sigma}]_{ij} = \text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$$

Definimos una cartera o portafolio como una selección de activos

- **Una cartera es un vector *w* de porcentajes invertidos en cada uno de los activos**

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{1} = \sum_{1}^{N} w_i = 1$$

- **La cartera tiene un retorno esperado *r*:**

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{e}} = \sum_{1}^{N} w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

- **y una varianza σ^2:**

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = \sigma^2$$

Ejemplo de un portafolio

- **Supongamos que tenemos el siguiente portafolio de dos acciones (Endesa y Copec)**

	Endesa	Copec
Retorno Esperado (r)	15%	21%
Varianza	784	1764
Desviación Estándar	28%	42%
Peso en Portafolio	60%	40%

- El retorno esperado de este portafolio es igual a:
  $r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 = (0.6 * 15) + (0.4 * 21) = 17.4\%$

La volatilidad del portafolio entre Endesa y Copec se calcula como:

- **Varianza del portafolio =**

	w_1	w_2
w_1	$w_1^2 \sigma_1^2$	$w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = w_1 w_2 \sigma_{12}$
w_2	$w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = w_1 w_2 \sigma_{12}$	$w_2^2 \sigma_2^2$

- σ_{12} = covarianza de los retornos
- ρ = correlación de los retornos

Ejemplo:

- **Varianza del portafolio =**

$0.6^2 * 28^2 = 282$	$0.6*0.4*0.4*28*42=113$
$0.6*0.4*0.4*28*42=113$	$0.4^2 * 42^2 = 282$

- Varianza = 282 + 282 + (2 * 113) = 790
- Desviación estándar = $(790)^{1/2}$ = 28.1%= Volatilidad
- Nota: Estamos suponiendo una correlación igual a 0.4

Ejemplo 2

- **Activos: Endesa, Copec**
- **Retornos esperados (Anualizados)**

Endesa:	**12%**
Copec:	**15%**

- **Retorno Esperado Cartera ?**

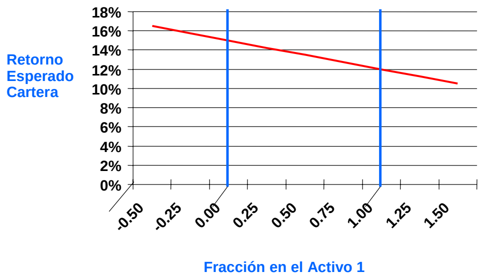
$$E(r_C) = w_1 * 12\% + w_2 * 15\%$$

Puesto que la proporción de inversión en cada activo suma 1:

$$E(r_C) = w_1 * 12\% + (1 - w_1) * 15\%$$

Retorno Esperado Cartera puede ser menor a 12% o mayor que 15%?

Retorno Esperado de la Cartera



Volatilidad de una cartera

- Habíamos visto que para una cartera, la volatilidad es

$$\sigma_C = \sqrt{w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho}$$

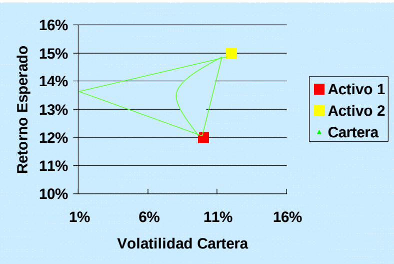
- Si volatilidad del activo 1 es 10% y del activo 2 es 12%, y su correlación es -0.5 entonces

Fracción w	Vol Cartera
0.0	12.0%
0.5	5.6%
1.0	10.0%

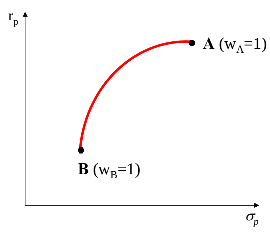
Calculando Retorno y Riesgo de la Cartera

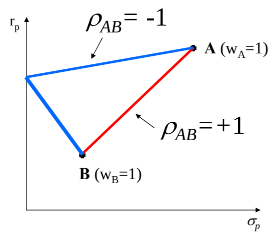
Peso Act 1	Retorno	Volatilidad de la Cartera para diferentes correlaciones:				
w	Esperado	-0.5	0	0.5	1	-1
0%	15.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%
10%	14.70%	10.34%	10.85%	11.33%	11.80%	9.80%
20%	14.40%	8.77%	9.81%	10.74%	11.60%	7.60%
30%	14.10%	7.37%	8.92%	10.24%	11.40%	5.40%
40%	13.80%	6.25%	8.24%	9.83%	11.20%	3.20%
50%	13.50%	5.57%	7.81%	9.54%	11.00%	1.00%
60%	13.20%	5.50%	7.68%	9.37%	10.80%	1.20%
70%	12.90%	6.06%	7.87%	9.34%	10.60%	3.40%
80%	12.60%	7.11%	8.35%	9.43%	10.40%	5.60%
90%	12.30%	8.46%	9.08%	9.66%	10.20%	7.80%
100%	12.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%

Graficando Retorno y Riesgo para una cartera



Carteras posibles con 2 activos





- Instrumentos con correlación positiva moderada
- Correlación perfecta (positiva y negativa)

Diversificación de riesgos

- Una adecuada selección del peso en cada uno de los activos permite una disminución del riesgo de la cartera.
- Un menor riesgo implica siempre una mayor rentabilidad?
- Es posible encontrar una cartera con riesgo cero?
- Qué pasa para más de dos activos?

Varianza de un portafolio de N instrumentos

- Varianza del Portafolio: $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$

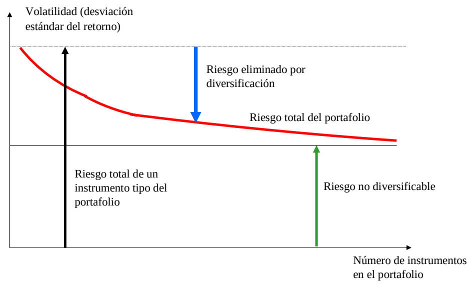
- Supongamos que el peso de cada instrumento es igual a 1/N
- En la varianza del portafolio, existen N varianzas ponderadas por 1/N y N^2-N covarianzas. Podemos decir entonces que la varianza del portafolio es:

$$\text{Varianza} = N\left(\frac{1}{N}\right)^2(\text{varianza promedio}) + (N^2 - N)\left(\frac{1}{N}\right)^2(\text{covarianza promedio})$$

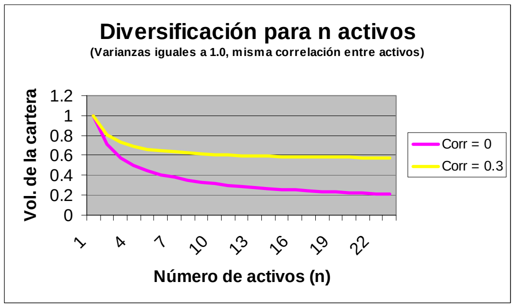
$$\text{Varianza} = \frac{1}{N}(\text{varianza promedio}) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)(\text{covarianza promedio})$$

- Si N es muy grande, la varianza del portafolio tiende a la covarianza promedio de los instrumentos.

La varianza del portafolio descenderá hasta un nivel donde no será posible reducir más su varianza.



Diversificación depende de la correlación



Frontera de mínima varianza de Carteras

$$\underset{\mathbf{w}}{Min}\ \frac{1}{2}\sigma_C = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w}}$$

$$s.a.\quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1$$

$$s.a.\quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{e}} = r$$

Condiciones necesarias y suficientes para carteras en la frontera de mínima varianza

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \cdot w_j - \lambda \cdot \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1 \ldots N$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Teorema de dos fondos

Matricialmente, la solución para *w* se despeja de

$$\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w} - \lambda \mathbf{R}_{\mathbf{e}} - \mu \vec{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{e}} = r$$

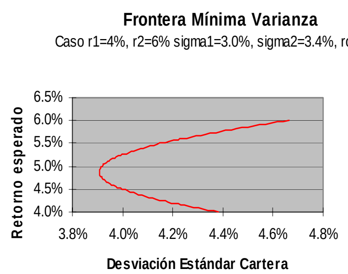
$$\mathbf{w}^T \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1$$

Si $w1$, y $w2$ son dos soluciones conocidas del problema para r distintos, entonces

$$w3 = \alpha\, w1 + (1 - \alpha)\, w2$$

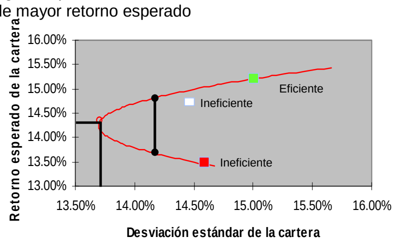
es también una solución para $r3 = \alpha r1 + (1 - \alpha)\, r2$.

Carteras de mínima varianza definen una parábola en el espacio r-σ^2



Concepto de frontera eficiente de carteras

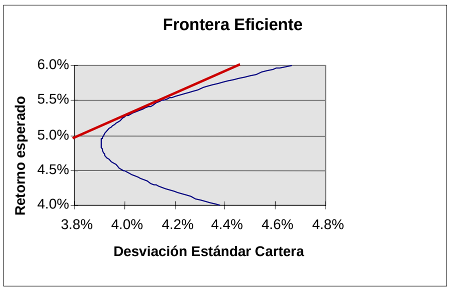
Agentes prefieren al mismo nivel de volatilidad carteras de mayor retorno esperado



Un caso particular...

- **Supongamos que la matriz de varianza covarianza es la identidad**
- **Cuál es la solución al problema de mínima varianza?**
- **Qué ocurre si N tiende a infinito?**
- **Cómo podemos usar este resultado para resolver el caso más general?**

Introduciendo Activos sin riesgo



Activo libre de riesgo

Nuevo valor esperado de la cartera:

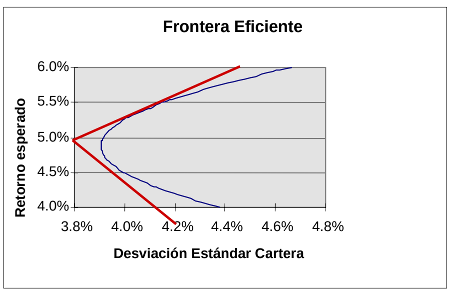
$$\bar{r}_E = w \cdot r_F + (1-w) \cdot r$$

Y el riesgo es....:

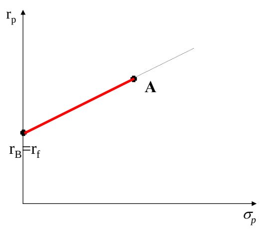
$$\sigma_C = (1-w) \cdot \sigma$$

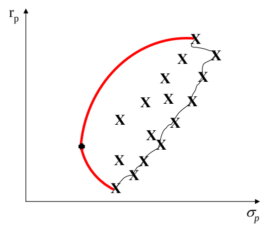
El efecto de la incorporación de un activo libre de riesgo es una ampliación de la región de carteras posibles de construir

Nueva Frontera



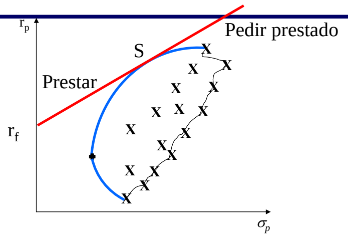
Combinación de Portafolio (II)





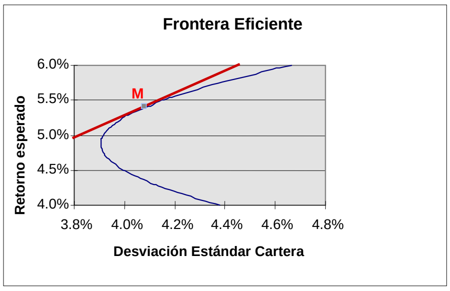
- **Uno de los instrumentos es libre de riesgo**
- **N instrumentos riesgosos**

Combinación de Portafolio (III)



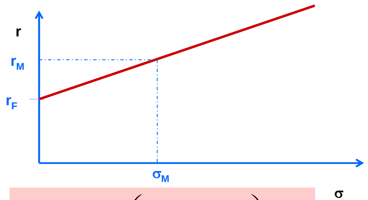
- S es el mejor portafolio de instrumentos riesgosos.
- El set de portafolio eficientes puede ser calculado a través de programación cuadratica que minimize la desviación estándar del portafolio sujeto a que el retorno sea al menos igual a Z.
- El portafolio óptimo está en la frontera pero también tiene el mayor ratio de retornos esperados por sobre la tasa libre de riesgo por unidad de desviación estándar.

La cartera de Mercado



Todo punto eficiente puede representarse como una combinación lineal entre el activo libre de riesgos y la cartera M

Línea de mercado de capitales



$$r = r_F + \left(\frac{r_M - r_F}{\sigma_M}\right) \cdot \sigma$$

El retorno de cualquier cartera en la frontera se expresa como una relación lineal de la volatilidad de dicha cartera