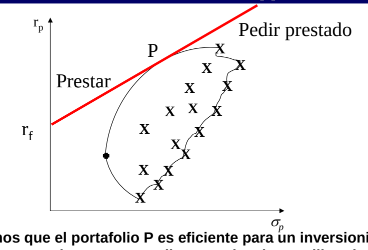
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Ingeniería Industrial

CAPM

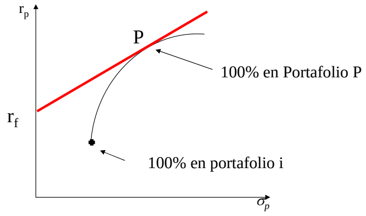
Avanzando hacia el Capital Asset Pricing Model - CAPM. (I).



- Supongamos que el portafolio P es eficiente para un inversionista en particular que puede prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo r_f.
- Si el portafolio es eficiente, no existe ninguna combinación del portafolio con otro instrumento i que tenga un mayor ratio de retornos por sobre r_f por unidad de riesgo [(rp – r_f) / σ_p]

Avanzando hacia el Capital Asset Pricing Model - CAPM. (II).

- Consideremos todas las combinaciones entre el portafolio P y el instrumento i.



- La curva anterior muestra todas las combinaciones de retorno y desviación estándar para el portafolio resultante Q.

Avanzando hacia el Capital Asset Pricing Model - CAPM. (III).

- Calculando el retorno y la varianza del portafolio Q (el instrumento i puede estar incluído en P pero mantendremos los ponderadores para P fijos).

$$r_Q = x r_i + (1-x) r_P$$
$$\sigma_Q^2 = x^2 \sigma_i^2 + (1-x)^2 \sigma_P^2 + 2x(1-x)\sigma_{iP}$$

- Evaluando la pendiente de la línea de retorno/riesgo para el portafolio Q en x=0

$$\frac{\partial r_Q}{\partial \sigma_Q} = \frac{\partial r_Q / \partial x}{\partial \sigma_Q / \partial x}$$
$$\frac{\partial r_Q}{\partial x} = r_i - r_P$$
$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sigma_Q} \frac{\partial \sigma_Q^2}{\partial x}$$

Avanzando hacia el Capital Asset Pricing Model - CAPM. (IV).

- Entonces

$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sigma_Q}[2x\sigma_i^2 + 2x\sigma_P^2 - 2\sigma_P^2 + 2\sigma_{iP} - 4x\sigma_{iP}]$$
$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial x} = \frac{x(\sigma_i^2 + \sigma_P^2 - 2\sigma_{iP}) - \sigma_P^2 + \sigma_{iP}}{\sigma_Q}$$

Evaluando en $x = 0$ $\quad (\sigma_Q = \sigma_P$ cuando $x = 0)$

$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial x} = \frac{-\sigma_P^2 + \sigma_{iP}}{\sigma_Q}$$

Entonces

$$\frac{\partial r_Q}{\partial \sigma_Q} = \frac{\partial r_Q / \partial x}{\partial \sigma_Q / \partial x} = \frac{\sigma_P (r_i - r_P)}{\sigma_{iP} - \sigma_P^2}$$

Avanzando hacia el Capital Asset Pricing Model - CAPM. (V).

- Esta pendiente debe ser igual a la pendiente de la línea conectando r_f y la combinación de r y s que provee el portafolio P.

$$\frac{\sigma_P (r_i - r_P)}{\sigma_{iP} - \sigma_P^2} = \frac{r_P - r_f}{\sigma_P}$$
$$r_i - r_P = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}(r_P - r_f)$$
$$r_i - r_P = \beta_{iP}(r_P - r_f)$$

- Si todos los inversionistas tienen las mismas creencias sobre los retornos esperados, todos mantendrán el portafolio eficiente reduciendo su elección al tradeoff entre r_p y s_p.

Los inversionistas sólo se preocupan de la contribución que hace cada instrumento al riesgo total del portafolio.

	w1	w2	w3
w1	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}
w2	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}
w3	σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}

$$w_1 \sum_i w_i \sigma_{1i} = w_1 \sigma_{1P}$$
$$w_2 \sum_i w_i \sigma_{2i} = w_2 \sigma_{2P}$$
$$w_3 \sum_i w_i \sigma_{3i} = w_3 \sigma_{3P}$$
$$\sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma_P^2$$

- Como vemos la contribución del instrumento i a la varianza del portafolio queda definido por:

$$\frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2} = \beta_{iP}$$

Beta de una acción

- Para el caso de un activo en particular,

$$\bar{r}_i = r_F + \beta_i \cdot (r_M - r_F)$$

- En donde,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$$

IN56A
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile
José Miguel Cruz 2007

Cada instrumento en un portafolio eficiente tiene retorno por sobre rf, proporcional a su beta.

$$\frac{r_i - r_f}{\sigma_{iP}} = \frac{r_P - r_f}{\sigma_P^2}$$

$$r_i - r_f = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}(r_P - r_f)$$

- Esto aplica a cualquier portafolio eficiente. Sin embargo, supongamos que todos los inversionistas eligen portafolios eficientes y que tienen la misma información. Entonces, todos querrán tener el mismo portafolio S. Adicionalmente, dado que todos las acciones deben tener un dueño, el portafolio S debe ser el mercado. Esto es CAPM.

$$r_i - r_f = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}(r_m - r_f)$$

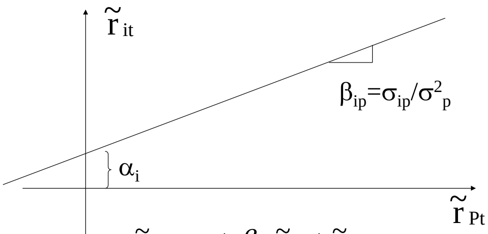
IN56A
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile
José Miguel Cruz 2007

Resumen de los principales conclusiones de la teoría de portafolio moderno.

- El inversionista está preocupado con el riesgo de portafolios que puede ser medido por la varianza (o desviación estándar) de la tasa de retorno futura.
- El riesgo individual de una acción es igual a su contribución al riesgo de un portafolio. Distinguiendo:
  - Riesgo no-sistemático: el cual puede ser eliminado a través de la diversificación.
  - Riesgo sistemático: el cual <u>no</u> puede ser eliminado a través de la diversificación.
- El riesgo sistemático de una acción puede ser medido por su beta que es un índice de la sensibilidad del retorno de una acción a fluctuaciones del mercado.
- La tasa de retorno esperada de una acción debería ser una función positiva de su beta. Bajo el modelo CAPM:
  - ⇒ $R = r_f + b(r_m - r_f)$

IN56A
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile
José Miguel Cruz 2007

El beta de una compañía es típicamente estimado a través de una regresión con datos históricos.



$$\tilde{r}_{it} = \alpha_i + \beta_{iP}\,\tilde{r}_{Pt} + \tilde{e}_t$$

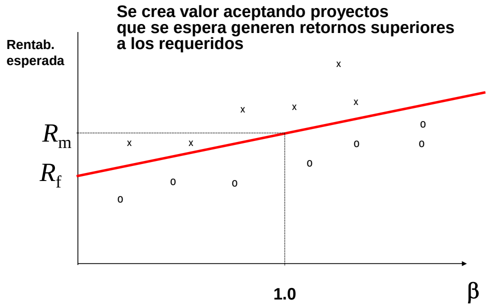
IN56A
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile
José Miguel Cruz 2007

Testeo de CAPM

- Si un portafolio es eficiente, debe existir una línea recta entre el retorno esperado de cualquier acción y su beta relativo a ese portafolio.
  - Testear CAPM es equivalente a testear que el portafolio de mercado es eficiente.
  - Sin embargo nos enfrentamos a los siguientes problemas:
    - Medición de los retornos esperados
    - Medición del portafolio de mercado
    - Medición del beta

IN56A
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile
José Miguel Cruz 2007

Línea del mercado de títulos (SML)



Validez de CAPM

- **La evidencia empírica es mixta**
  - Los retornos promedios de largo plazo están significativamente relacionados con el beta sin embargo CAPM no "parece" funcionar en los pasados 30 años.
  - Fama y French sugieren que CAPM está muerto porque desde los 60s se ha observado entre otras cosas lo siguiente:
    - a) Acciones de empresas pequeñas han tenido un retorno significativamente mejor que lo que predice CAPM
    - b) Acciones con bajas razones precio a valor libro han tenido una rentabilidad significativamente mejor que lo que predice CAPM
    - c) Después de ajustar por a y b, beta tiene poco poder de explicación de los retornos de una acción.

Sin embargo, a pesar de la evidencia empírica, CAPM sigue siendo controversial.

- **Nadie sabe con certeza como definir y medir el portafolio de mercado.**
  - Por otro lado sabemos que si usamos el índice de mercado equivocado podemos terminar con respuestas erróneas.
  - CAPM es difícil de probar y también rechazar.
  - El modelo tiene competidores, por ejemplo APT (Arbitrage Pricing Model).
- **CAPM sigue siendo una herramienta muy atractiva**
  - Es muy simple y entrega respuestas muy razonables.
  - Distingue claramente entre riesgo diversificable y no-diversificable.

Beta de una cartera y diversificación

- **Beta de una cartera** $\beta = \sum_i w_i \cdot \beta_i$
- **Riesgo sistemático**

$$r_i = r_F + \beta_i \cdot (\bar{r}_M - r_F) + \varepsilon_i$$

$$\sigma_i^2 = \overbrace{\beta_i^2 \cdot \sigma_M^2}^{\text{Riesgo sistemático}} + \overbrace{Var(\varepsilon_i)}^{\text{Riesgo no sistemático (específico)}}$$

Beta y el precio de activos

- **Comprar activo en P, y venderlo a un precio (aleatorio) Q**
- **Retorno esperado de la inversión es: r = Q_E/P -1**
- **Incorporando fórmula del CAPM:**

$$\frac{Q_E - P}{P} = r = r_F + \beta_Q \cdot (\bar{r}_M - r_F)$$

- **Por lo que el precio de un activo puede expresarse como:**

$$P = \frac{Q_E}{1 + r_F + \beta_Q \cdot (\bar{r}_M - r_F)}$$