Curso: IN56A
Semestre: Primavera 2007
Prof: José Miguel Cruz – Andrés Kettlún
Aux: Lorenzo Réus
Jaime Sáez

AUXILIAR 6: CAPM y Teoría de carteras

Pregunta 1

Suponga que usted tiene los siguientes datos sobre los retornos esperados de las acciones A, B, C y D

	A	B	C	D
Retorno	15%	20%	17%	5%

Y la siguiente matriz de varianza covarianza

	A	B	C	D
A	0,0625	0,0525	0,0280	0,0120
B	0,0525	0,1225	0,0294	0,0420
C	0,0280	0,0294	0,0784	0,0134
D	0,0120	0,0420	0,0134	0,0576

a. Calcule el retorno esperado y la desviación estándar de un portafolio compuesto por \$4.500.000 de A y \$5.500.000 de C

Respuesta:

Notar que en la matriz de varianza covarianza, la diagonal corresponde a la varianza de cada uno de los activos en cuestión, mientras que cada cifra en la posición i,j corresponde a la covarianza entre el activo i y el activo j. Por lo tanto,

$$r_p = \frac{4{,}5}{10}\cdot 15\% + \frac{5{,}5}{10}\cdot 17\% = 16{,}1\%$$

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{4{,}5}{10}\right)^2 \cdot 0{,}0625 + \left(\frac{5{,}5}{10}\right)^2 \cdot 0{,}0784 + 2\cdot\left(\frac{4{,}5}{10}\right)\cdot\left(\frac{5{,}5}{10}\right)\cdot 0{,}0280 = 0{,}0502$$

$$\Rightarrow \sigma_p = 22{,}4\%$$

b. ¿Cuánto debe invertir de sus $10.000.000 en A y en C si ahora lo que busca es tener la menor desviación estándar posible para una cartera compuesta solamente por esas dos acciones? Cuál es el retorno esperado y la varianza de esta cartera?

Respuesta:

Derivamos el peso a invertir en la cartera de mínima varianza

$$\sigma_{mv}^2 = w^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_C^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_{A,C}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma^2}{\partial w} = 2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_C^2 + 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_{A,C} - 2 \cdot w \cdot \sigma_{A,C}$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial w} = 0 \Rightarrow w_A = \frac{\sigma_C^2 - \sigma_{A,C}}{\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2 \cdot \sigma_{A,C}} = 59{,}4\%$$

$$\Rightarrow (1 - w_A) = w_C = 40{,}6\%$$

Por lo tanto, debo invertir $5.940.000 en la acción A y 4.060.000 en la acción C. Esta cartera tiene un retorno esperado y volatilidad respectivamente de:

$$r_p = 0{,}594 \cdot 15\% + 0{,}406 \cdot 17\% = 15{,}8\%$$

$$\sigma_p^2 = (0{,}594)^2 \cdot 0{,}0625 + (0{,}406)^2 \cdot 0{,}0784 + 2 \cdot (0{,}594) \cdot (0{,}406) \cdot 0{,}0280 = 0{,}0485$$

$$\Rightarrow \sigma_p = 22{,}0\%$$

c. Suponga ahora que usted desea agregar el activo B a su cartera de la parte (b) compuesta por A y C. ¿Cuánto debe invertir en B de manera que se minimice el riesgo total de la nueva cartera? ¿Cuál es la volatilidad y el retorno esperado de esta nueva cartera? (0,5 puntos) NOTA: (usted dispone de más dinero para invertir en B, es decir, asuma que tiene invertido $10.000.000 en A y C en conjunto de acuerdo al resultado de la parte (b), y quiere invertir un monto X aparte de esos 10.000.000 en el fondo B)

Respuesta:

Debemos hallar los w que minimicen el riesgo total de la cartera compuesta por la cartera AC (obtenida de b) y la acción C. Para ello debemos usar la volatilidad de la cartera calculada en la parte b) pero además debemos calcular la covarianza entre la cartera AC y la acción B. Usando la definición de covarianza (o recordando propiedades de la covarianza)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{AC,B} &= E\left[\left(r_{AC} - E\left(r_{AC}\right)\right)\cdot\left(r_B - E\left(r_B\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(0{,}594\cdot r_A + 0{,}406\cdot r_C - 0{,}594\cdot E\left(r_A\right) - 0{,}406\cdot E\left(r_A\right)\right)\cdot\left(r_B - E\left(r_B\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(0{,}594\cdot\left(r_A - E\left(r_A\right)\right) + 0{,}406\cdot\left(r_C - E\left(r_C\right)\right)\right)\cdot\left(r_B - E\left(r_B\right)\right)\right] \\
&= 0{,}594\cdot E\left[\left(r_A - E\left(r_A\right)\right)\cdot\left(r_B - E\left(r_B\right)\right)\right] + 0{,}406\cdot E\left[\left(r_C - E\left(r_C\right)\right)\cdot\left(r_B - E\left(r_B\right)\right)\right] \\
&= 0{,}594\cdot\sigma_{A,B} + 0{,}406\cdot\sigma_{C,B} = 0{,}0431
\end{aligned}
$$

Luego, usando el resultado de la cartera de mínima varianza

$$
w_{AC} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AC,B}}{\sigma_{AC}^2 + \sigma_B^2 - 2\cdot\sigma_{AC,B}} = \frac{0{,}1225 - 0{,}0431}{0{,}0485 + 0{,}1225 - 2\cdot 0{,}0431} = 93{,}6\%
$$

$$
\Rightarrow (1 - w_{AC}) = w_B = 6{,}4\%
$$

Finalmente, para concluir cuánto invertimos, notamos que el 93,6% de la cartera corresponde a 10.000.000 invertidos en A y C, luego invertimos en B

$$
w_B = 6{,}4\%\cdot\frac{10.000.000}{93{,}6\%} = 683.760
$$

El retorno esperado y volatilidad de la cartera calculada son:

$$
\begin{aligned}
&r_p = 0{,}936\cdot 15{,}8\% + 0{,}064\cdot 20\% = 16{,}1\% \\
&\sigma_p^2 = \left(0{,}936\right)^2\cdot 0{,}0485 + \left(0{,}064\right)^2\cdot 0{,}1225 + 2\cdot\left(0{,}936\right)\cdot\left(0{,}064\right)\cdot 0{,}0431 = 0{,}0482 \\
&\Rightarrow \sigma_p = 21{,}9\%
\end{aligned}
$$

Pregunta 2

En un mundo donde se cumple el CAPM, el activo de mercado tiene una rentabilidad esperada de 15% anual, la tasa libre de riesgo es de 5% anual, y la volatilidad de la cartera de mercado es de 20% anual. Suponga que Ud. dispone de 1 millón de patrimonio para invertir.

a) ¿Cómo lo distribuiría en forma óptima si quisiera minimizar el riesgo total?
b) ¿Cómo cambia su respuesta si quiere tener una volatilidad total máxima igual a su rentabilidad esperada?
c) ¿Cómo cambia su respuesta si su objetivo es asegurarse al 95% que no pierda patrimonio? Nota: recuerde que si x se distribuye como una distribución normal (μ,σ) se cumple que $P(x < \mu - 1.64*\sigma)=5\%$.
d) Si no dispone de patrimonio, y quisiera obtener una rentabilidad esperada del 8%, ¿qué riesgo correría?

Sol:

a) Si se quisiera minimizar el riesgo total la estrategia es invertir todo el capital a la tasa libre de riesgo, que si bien retornará menos que otras carteras si tendrá el menor riesgo ($\sigma = 0$)**.**

b) Para determinar el portafolio que entregue una volatilidad máxima igual a su retorno se utiliza la L.M.C..

Rm = 15%
Rf = 5%
σm = 20 %

Estamos buscando σm=Rm por lo tanto,

$$Rc = (1-w) * Rf + w * Rm$$

$$\sigma_C^2 = (1-w)^2 \sigma_f^2 + w^2 \sigma_m^2 + 2(1-w) w \sigma_f \sigma_m \rho_{fm}$$

$$\Rightarrow \sigma_C^2 = w^2 \sigma_m^2$$

$$\Rightarrow w\sigma_m = (1-w) * Rf + w * Rm$$

$$w20\% = (1-w) * 5\% + w * 15\%$$

$$\Rightarrow w = 0.5$$

Por lo tanto habría que invertir un 50% en el activo libre de riesgo y un 50% en el portafolio de mercado.

c) La condición fundamental es que en el peor de los casos, a un 95%, el patrimonio sea 0.

Buscamos: P(x>0)=95% ⇔ P(x<0)=5%
P((x−μ)/σ< z)=5%

Así, se tienen dos ecuaciones:

$$Rc = (1-w)*Rf + w*Rm$$

$$R_C = 1.64\sigma_C$$

Además de la parte b tenemos que:

$$\sigma_C^2 = w^2\sigma_m^2$$

De estas tres ecuaciones se tiene:

$$1.64*w\sigma_m = (1-w)*Rf + w*Rm$$

$$1.64*w20\% = (1-w)*5\% + w*15\%$$

$$\Rightarrow w = 0.219$$

$$\therefore \sigma_C = 0.044 \Rightarrow R_C = 7.2\%$$

d) Como no se dispone de patrimonio, lo mejor sería endeudarse a la tasa libre de riesgo e invertir en el portafolio de mercado.

Cartera tendría siguiente comportamiento:

$$R_C = -wR_f + wR_m = w(R_m - R_f)$$

$$0.08 = w(0.15-0.05)$$

$$\Rightarrow w = 0.8$$

Ahora, el riesgo que se asume por invertir en este portafolio es de:

$$\text{var}(R_C) = \text{var}(w(R_m - R_f)) = w^2 * \text{var}(R_m) = w^2 * \sigma_m^2 = 0.26$$

$$\therefore \sigma_C = 16\%$$

Problema 3

En al año 2005, después de años de fusiones entre conglomerados, sólo 2 grandes conglomerados quedan en la Bolsa de Comercio de Nueva York. Por conveniencia, llamaremos a estas firmas A y B. Cada una aporta con la mitad de la riqueza en el portafolio de mercado. Se han dado los siguientes datos:

	Firma A	Firma B
Tasa de retorno esperada	23%	13%
Desviación estándar del retorno (por año)	40%	24%

El coeficiente de correlación entre A y B es $\rho AB = 0.8$

a) ¿Cuál es la tasa de retorno esperado del portafolio de mercado (rm)?

R:

Del enunciado w1=w2=0.5

Luego $\overline{r_m} = w_a \cdot \overline{r_a} + w_b \cdot \overline{r_b} = 0.5 \cdot 0.23 + 0.5 \cdot 0.13 = 0.18 = 18\%$

b) ¿Cuál es la desviación estándar del portafolio de mercado (σm)?

R:

$$\sigma_m^2 = w_a^2 \cdot \sigma_a^2 + w_b^2 \cdot \sigma_b^2 + 2 \cdot w_a \cdot w_b \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \rho_{ab} = 0.0928$$

Usamos que: $\Rightarrow \sigma_m = 30.46\%$

c) ¿Cuáles son los betas del las firmas A y B?

R:

De la definición de beta, y recordando las propiedades bi-lineales de la covarianza de dos variables aleatorias ra y rm:

$$\beta_a = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_m^2}$$

$$pero\ \sigma_{am} = \text{cov}(r_{a,}r_m) = \text{cov}(r_a, w_a \cdot r_a + w_b \cdot r_b) = w_a \cdot \text{cov}(r_a, r_a) + w_b \cdot \text{cov}(r_a, r_b)$$

$$\Rightarrow \sigma_{am} = 0.5 \cdot \sigma_a^2 + 0.5 \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \rho_{ab} = 0.1184$$

$$\Rightarrow \beta_a = \frac{0.1184}{0.0928} = 1.276$$

Para calcular beta de la empresa b, se puede realizar el mismo procedimiento anterior, o notar que:

$$\sigma_m^2 = \sum_i w_i \cdot \sigma_{im} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \sum_i w_i \cdot \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \sum_i w_i \cdot \beta_i$$

$$luego: 1 = w_a \cdot \beta_a + w_b \cdot \beta_b \Rightarrow \beta_b = \frac{1 - w_a \cdot \beta_a}{w_b} = 0.724$$

d) Asumiendo que la tasa libre de riesgo es del 10%. ¿Son las tasas de retornos esperadas de A y B consistentes con CAPM?

R:

CAPM $\Rightarrow \overline{r_i} = r_f + \beta_i \cdot \left(\overline{r_m} - r_f\right)$ retorno esperado del activo i.

Luego, reemplazando con los datos anteriores:

$r_a = 20.2\%$

$r_b = 15.79\%$

no es coherente con los datos del problema. Luego, probablemente el que calculó los datos del problema no lo hizo con CAPM (usó otro método, tipo media de datos históricos).