Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.

Prof: Adriana Piazza.
Aux: Sebastián Donoso.

MA1B2-5. Ejercicios, 2 semana, 2 clase — 2007

1) Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Podemos escribirlo matricialmente como $Ax = b$ donde la matriz $A \in \mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar facilmente que este sistema es incompatible observando la primer y la tercer ecuación (de existir solución podríamos concluir que $1 = 2$!). Lo resolvemos utilizando eliminación de variables, en forma ordenanda desde la primera variable de la izquierda y desde arriba hacia abajo. Escribiremos a la derecha el proceso equivalente en términos de la matriz aumentada.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer ecuación por 2 y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \qquad E_{12}(2,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer ecuación por (-1) y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & & & 0 & = & -1 \end{array} \qquad (\tilde{A}|\tilde{b}) = E_{13}(-1,1)E_{12}(2,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obs.: Veremos más adelante que tener una fila en $(\tilde{A}|\tilde{b})$ donde el elemento de la última columna es distinto de cero (en este caso $(\tilde{A}|\tilde{b})_{35} = -1$) y todos los demás elementos son 0, es equivalente a tener un sistema incompatible.

2) Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones y repitamos el procedimiento anterior:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 & = & 1 \end{array} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer ecuación por (-1) y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ -2x_3 - x_4 & = & -3 \\ x_1 + x_3 + x_4 & = & 1 \end{array} \qquad E_{12}(-1,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer ecuación por (-1) y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ -2x_3 - x_4 & = & -3 \\ -2x_2 & = & -1 \end{array} \qquad E_{13}(-1,1)E_{12}(-1,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obs.: Es imposible eliminar la variable x_2 de la tercera ecuación, sin hacer aparecer otra vez la variable x_1. Es decir, no se puede terminar el proceso de escalerización de la matriz multiplicando por matrices elementales $(E_{ij}(\lambda, \beta))$.

Observe que en este caso, basta intercambiar las filas 2 y 3 para terminar dicho proceso. Esto corresponde a cambiar el orden de las ecuaciones y evidentemente no cambia el sistema.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ -2x_2 & = & -1 \\ -2x_3 - x_4 & = & -3 \end{array} \qquad (\tilde{A}|\tilde{b}) = I_{23}E_{13}(-1,1)E_{12}(-1,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene infinitas soluciones que pueden ser expresadas como:

$$x_1 = -\tfrac{3+x_4}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = \tfrac{3-x_4}{2} \qquad x_4 = \text{ libre.}$$

3) Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones y repitamos el procedimiento anterior:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 & = & -1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \end{array} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer ecuación por 2 y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \end{array} \qquad E_{12}(2,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer ecuación por $(-\frac{1}{2})$ y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = & 0 \end{array} \qquad E_{13}(-\tfrac{1}{2},1)E_{12}(2,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por $(-\frac{1}{2})$ y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ -\frac{1}{2}x_4 & = & -\frac{3}{2} \end{array} \qquad (\tilde{A}|\tilde{b}) = E_{23}(-\tfrac{1}{2},1)E_{13}(-\tfrac{1}{2},1)E_{12}(2,1)(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

El sistema tiene infinitas soluciones que pueden ser expresadas como:

$$x_1 = 2 - 2x_2 \qquad x_2 = \text{ libre} \qquad x_3 = -3 \qquad x_4 = 3$$

4) Recordamos el ejemplo de la clase anterior donde el sistema tenía solución única y

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Para terminar, recordamos el ejemplo del apunte (pág. 18) donde el sistema tiene infinitas soluciones y

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

¿Qué puede conjeturar sobre la relación que existe entre la forma de la matriz $(\tilde{A}|\tilde{b})$ y la existencia de soluciones de sistema y el número de éstas?

Obs.: Estos ejemplos **no** constituyen una prueba del caso general. Ésta se verá en las clases de la próxima semana.