

P2(Auxiliar 2) Obtenga la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

En base a la descomposición anterior resuelva $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solución:

La descomposición **LU** de una matriz consiste en expresarla como el producto de una matriz triangular inferior (**L**ower triangular matrix) y una matriz triangular superior (**U**pper triangular matrix)

La estrategia consiste en escribir la matriz A aumentada con la identidad y escalonarla hasta transformarla en una triangular superior. Debemos ser cuidadosos en **sólo** usar matrices de elementales de suma en este proceso (esto debido a que éstas son todas matrices triangulares inferiores, y en consecuencia el producto también lo es y luego inversa de este producto también. Las matrices de permutación **no** son triangulares inferiores, por ello desechamos su uso en este método). Con el objetivo de poder expresar L y U con unos en sus diagonales(**), se optará por sólo usar matrices de suma de la forma $E_{pq}(\beta, 1)$ i.e no multiplicaremos la fila en donde queremos dejar un cero.

Escribamos la matriz aumentada con la identidad (para guardar la matriz por la que se multiplicó a A para dejarla triangular superior) y escalonémosla.

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasta aquí ya hemos obtenido una matriz triangular superior en donde estaba A .

Lo que hicimos fue $EA=U$, donde U es la matriz que quedó en la posición donde estaba A . E es la matriz por la que se multiplicó a A para transformarla en U , luego E quedó guardada donde estaba la identidad. Como E es producto de matrices elementales de suma, es triangular inferior e invertible, denotemos $L = E^{-1}$ (L es triangular inferior por serlo E). Con eso $EA=U$, ssi $A = E^{-1}U = LU$, donde L es triangular inferior y U triangular superior, obteniéndose lo pedido. Ya tenemos U , falta calcular L (basta invertir E).

Copiamos E aumentada con la identidad y calculamos su inversa.

$$(E|I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ escalonando.. } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con esto obtenemos } E^{-1} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y en consecuencia tenemos:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Con esta descomposición se nos pide resolver el sistema $Ax=b$.

$Ax=b$ ssi $LUx=b$.

Resolvemos el sistema en 2 pasos.

(1) Hacemos $y=Ux$, transformándose el problema en resolver $Ly=b$.

Pero L es triangular inferior así que podemos resolver el problema de inmediato despejando las variables y reemplazándolas en las ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$y_1 = 1$$

Este sistema es $\frac{1}{4}y_1 + y_2 = -1$

$$\frac{1}{2}y_1 + 2y_2 + y_3 = 2$$

De donde se obtiene, $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{5}{4}$, $y_3 = 4$

(2) Recordamos $Ux=y$ y resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$-13x_3 = 4$$

Y este sistema es $\frac{17}{4}x_2 + \frac{11}{2}x_3 = -\frac{5}{4}$

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 1$$

De donde se obtiene $x_3 = -\frac{4}{13}$, $x_2 = \frac{23}{221}$, $x_1 = \frac{140}{221}$

Luego:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{140}{221} \\ \frac{23}{221} \\ -\frac{4}{13} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Obs: Ya teniendo la descomposición LU de A, de manera sencilla podemos obtener su descomposición LDU.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}, \text{ generamos una matriz diagonal entre L y U}$$

“factorizando” U para que quede con 1s en su diagonal. En nuestro caso, no es difícil ver que

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{22}{17} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Recuerden que cuando una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

multiplica a otra matriz M por la izquierda, resulta la matriz M con su fila i multiplicada por a_i)

Con ello, obtenemos la descomposición LDU de A.

$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{22}{17} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(**) En esta descomposición me refería más arriba de dejar sólo unos en la diagonal de L y U.

Tarea: Demuestre, como sale en su apunte, que la descomposición LDU, en las condiciones mencionadas, es única.

Hint1: Suponga

$A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$ defina $B = L_2^{-1} L_1 D_1 = D_2 U_2 U_1^{-1}$. ¿Cómo es B? ¿T. superior?, ¿T inferior? Concluya la forma de B.

Hint 2: Si A es t inferior(o superior), y sólo tienes unos en su diagonal.

- (i) ¿Es invertible?
- (ii) ¿Qué tiene A^{-1} en su diagonal? (use la definición del producto matricial y que A^{-1} también es t. inferior(o superior))