MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2007-2
Profesor: Axel Osses **Auxiliares:** Nicolás Carreño, Jorge Lemus.

Pauta Control 1

18 de Agosto de 2007

P1.- La ecuación que modela la cantidad de presión $y(t)$ es

$$y' = k(p_A - y) \qquad k > 0$$

o escrito de otra forma

$$y' + ky = kp_A$$

que es una ecuación lineal de primer orden que tiene como solución

$$y(t) = p_A + Ce^{-kt}.$$

Para encontrar C y k, evaluamos en t_1 y t_2:

$$y(t_1) = p_1 = p_A + Ce^{-kt_1}$$

$$y(t_2) = p_2 = p_A + Ce^{-kt_2}$$

de donde se deduce

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left(\frac{p_1 - p_A}{p_2 - p_A}\right)$$

$$C = (p_1 - p_A)e^{kt_1}$$

Para encontrar el instante t_0, notemos que $y(t_0) = p_0$, y así

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{C}{p_0 - p_A}\right)$$

$$t_0 = \frac{(t_2 - t_1)}{\ln\left(\frac{p_1 - p_A}{p_2 - p_A}\right)} \ln\left(\frac{(p_1 - p_A)e^{kt_1}}{p_0 - p_A}\right)$$

$$t_0 = \frac{(t_2 - t_1)kt_1}{\ln\left(\frac{p_1 - p_A}{p_2 - p_A}\right)} + \frac{\ln\left(\frac{(p_1 - p_A)}{p_0 - p_A}\right)}{\ln\left(\frac{p_1 - p_A}{p_2 - p_A}\right)}(t_2 - t_1)$$

usando que

$$k(t_2 - t_1) = \ln\left(\frac{p_1 - p_A}{p_2 - p_A}\right)$$

obtenemos finalmente

$$t_0 = t_1 - \frac{\ln\left(\frac{p_1 - p_A}{p_0 - p_A}\right)}{\ln\left(\frac{p_2 - p_A}{p_1 - p_A}\right)}(t_2 - t_1).$$

P2.- **(i)** Si derivamos la ecuación con respecto a x, obtenemos que

$$xy'' + y' = y' + \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{(y')^2 y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

de donde, simplificando y usando el cambio de variable $z = y'$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} - \frac{z^2}{(1 + z^2)^{3/2}}$$

$$x = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}$$

Despejando z

$$z = \sqrt{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - 1}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

de donde podemos encontrar y por integración directa

$$y = \int \frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx + C$$

Con el cambio de variable

$$w = 1 - x^{\frac{2}{3}}, \quad dw = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$y = \int -\frac{3\sqrt{w}}{2} dw + C = -w^{\frac{3}{2}} + C$$

$$y = -(1-x^{\frac{2}{3}})^{2/3} + C$$

Como $y(1) = 0$, se tiene que $C = 0$, y así

$$y^{\frac{2}{3}} = 1 - x^{\frac{2}{3}}.$$

(ii) Veamos la primera ecuación:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{1+y/x}{1-y/x}$$

Hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{y}{x}, \quad y' = z + xz'$$

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z}$$

$$xz' = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2} z' = \frac{1}{x}$$

es decir, variables separables

$$\int \frac{1}{1+z^2} dz - \int \frac{z}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx + C$$

$$\operatorname{arc\,tg} z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln x + C.$$

Veamos ahora la segunda ecuación

$$x^2 y' + y^2 = xy$$

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x^2}$$

Vemos que es una ecuación de Bernoulli. Hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = \frac{-y'}{y^2}$$

con lo que llegamos a

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$z = \frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{1}{\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}}$$

P3.- Derivando la expresión $u(z) = y(e^z)$ con respecto a z se tiene que

$$\frac{du}{dz} = u' = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = y'e^z$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = u'' = y'e^z + e^z \frac{dy'}{dx}\frac{x}{z} = y'e^z + y''e^{2z} = u' + y''e^{2z}$$

de donde deducimos

$$xy' = u', \quad x^2y'' = u'' - u'.$$

Reemplando en la ecuación

$$u'' - u' + au' + bu = 0$$

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0$$

El polinomio caracterśtico de esta ecuación es

$$\lambda^2 + (1-a)\lambda + b = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{(1-a)}{2} + \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

Sea $\Delta = (a-1)^2 - 4b$. Tenemos 3 casos según sea el signo de Δ

$\Delta > 0$: En este caso tenemos dos raices reales distintas

$$\lambda_1 = \frac{(1-a)}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1-a)}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$u(z) = c_1e^{\lambda_1 z} + c_2e^{\lambda_2 z}$$

$$y(x) = c_1x^{\lambda_1} + c_2x^{\lambda_2}$$

$\Delta = 0$: En este caso el polinimio tiene sólo una raiz, ie, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\lambda = \frac{1-a}{2}$$

$$u(z) = c_1e^{\lambda z} + c_2ze^{\lambda z}$$

$$y(x) = c_1x^{\lambda} + c_2x^{\lambda}\ln x$$

$\Delta < 0$: En este caso λ_1 y λ_2 son complejos conjugados

$$\lambda_1 = \frac{(1-a)}{2} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1-a)}{2} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$u(z) = e^{\frac{(1-a)}{2}z}(c_1\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z) + c_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z))$$

$$y(x) = x^{\frac{(1-a)}{2}}(c_1\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln x) + c_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln x))$$

Para aplicarlo a la ecuación $x^2y'' + xy' + 9y = 0$, notemos que $a = 1$ y $b = 9$, y así $\Delta = -36$. Nos encontramos entonces en el tercer caso, en donde la solución viene dada por

$$y(x) = c_1\cos(3\ln x) + c_2\operatorname{sen}(3\ln x)$$